

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

КОЧКУРОВ Сергей Анатольевич

**Разработка и исследование аппаратно - программных
средств оценки информативности параметров сигналов**

Специальность 05.12.17 - Радиотехнические и телевизионные системы и
комплексы.

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Научный руководитель
кандидат технических наук
профессор Викторов А. Д.

Санкт-Петербург - 1997

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	
Глава 1. Анализ критериев выбора информативных параметров сигналов	
1.1. Идентификация систем и выбор информативных параметров сигналов	
1.1.1. Критерии выбора параметров для идентификации	
в широком смысле	
1.1.2. Критерии выбора параметров для идентификации	
в узком смысле	
1.1.4. Критерий выбора параметров,	
обеспечивающих наблюдаемость	
1.1.5. Критерий выбора параметров,	
обеспечивающих идентифицируемость	
1.2. Критерий выбора параметров,	
дающих минимальную дисперсию оценки	
1.3. Критерии выбора информативных параметров	
в задаче классификации сигналов	
1.4. Выводы	
Глава 2. Разработка и исследование метода оценки информативности параметров	
на основе анализа информационных характеристик	
2.1. Критерий информативности параметров сигналов на основе анализа расстояний	
между распределениями	
2.2. Критерий информативности параметров сигналов на основе анализа	
информационной матрицы Фишера и ее свойств	
2.2.1. Свойства информационной матрицы Фишера, как критерия	
информативности	
2.2.2. Расчет информативности параметров сигнала с использованием	
аналитических выражений для плотности распределения	
2.2.3. Расчет информативности параметров сигнала с использованием	
статистического моделирования	
2.2.4. Расчет информативности параметров сигнала с использованием	
экспериментальных измерений плотности распределения.....	
2.3. Разработка программных средства оценки информативности	
2.4. Выводы	

Глава 3. Методы и алгоритмы оценки многомерных плотностей распределения вероятностей случайных процессов	
3.1. Методы и алгоритмы оценки многомерной ПРВ случайных процессов	
3.2. Анализ погрешностей ПРВ методом гистограмм	
3.3. Выбор параметров преобразования сигналов для оценки ПРВ методом гистограмм	
3.3.1. Определение числа уровней квантования	
3.3.2. Определение частоты дискретизации	
3.4. Разработка аппаратно-программных средств оценки ПРВ параметров сигналов	
3.5. Выводы	
Глава 4. Разработка аппаратно- программных средств оценки информативности параметров и их использование	
4.1. Пакет программ для оценки информативности параметров сигнала	
4.2. Приложение метода оценки информативности при различении сигналов с различными видами модуляции	
4.3. Выводы	
Заключение	
Литература	
Приложение	

ВВЕДЕНИЕ

1. Актуальность темы.

Синтез оптимального приемника при неопределенности по первичным параметрам часто является затруднительным и неконструктивным. Это вызвано сложностью получения достаточной статистики отношения правдоподобия либо существенными трудностями реализации полученных алгоритмов. Упрощение же оптимальных алгоритмов вносит субъективизм и неоднозначность в получаемые подоптимальные алгоритмы.

Одним из методов создания подоптимальных алгоритмов является выделение наиболее информативных параметров. Для принятия того или иного решения оцениваются не все параметры сигнала, а наиболее значимые с точки зрения их разделяющей способности. Оптимальный приемник строится для оценки только ограниченного числа информативных параметров, что упрощает его реализацию.

В такой постановке задачи проектирования подоптимального приемника возникает проблема выбора наиболее информативных параметров и следовательно исключения из рассмотрения параметров которые не существенны.

По этой причине актуальной является проблема разработки аппаратно программных средств оценки информативности параметров выделенных тем или иным способом.

К задачам синтеза приемника в условиях неопределенности по первичным параметрам относятся задачи радиотехнических систем контроля и наблюдения, работающие в пассивном режиме. Примерами данных систем могут быть системы радиотехнической разведки. На приемник указанных систем возлагаются ряд задач по извлечению информации о виде принимаемых сигналов: определение несущей частоты, определение типа излучения (импульсное, непрерывное), опознание типа модуляции и ее параметров, и т. д. Можно сказать, что задачей приемника является по возможности более полное описание сигнала источника излучения.

2. Состояние дел.

Проведенный обзор имеющихся публикаций посвященных проблеме построения алгоритмов в условиях неопределенности по первичным параметрам сигнала показал, что информативные признаки выбираются авторами интуитивно, без предварительной их оценки по информативности.

Применение подходов к выбору информативных признаков на основе метода главных компонент (МГК) и факторного анализа сдерживается ограничениями на вид ПРВ наблюдений. Эти методы являются оптимальными при гауссовских ПРВ наблюдений. Имеются сведения, что эти методы остаются работоспособными для класса унимодальных ПРВ.

Распределения параметров информативных наблюдений как правило являются результатом нелинейных преобразований гауссовых величин и принадлежат более широкому классу, чем унимодальные.

3. Классификация методов оценки информативности параметров.

Была составлена классификация методов оценки информативности параметров.

Множество существующих методов оценки информативности параметров можно разбить на две группы по признаку наличия связи с ошибкой различения - оценивания.

Первую группу методов оценки информативности составляют методы основанные на принципе: более информативные параметры должны доставлять наибольшее значение выбранному критерию информативности. В качестве подобных критериев используются: энтропия, дивергенция, и др. Существенным недостатком данных методов является наличие связи с вероятностью ошибки только для ограниченных видов распределений параметра, чаще всего для гауссовского. К преимуществам следует отнести возможность получения выражений для линейных преобразований исходной совокупности признаков.

С теоретической точки зрения вероятность ошибки является наилучшим показателем информативности параметра.

Ко второй группе методов относится метод оценки информативности на основе экспериментального оценивания вероятности ошибки. Интуитивно выбрав набор параметров, строят на их основе алгоритм различения, оценивания и экспериментально находят ошибки различения - оценивания. Это метод является гибким и не зависит от вида распределения. Недостатки критерия вероятности ошибки заключаются в том что, за исключением очень небольшого числа частных случаев, для него не существует явного математического выражения, кроме того оценка информативности параметров зависит от построения алгоритма различения, оценивания.

Другой подход к оценке информативности параметров, относящийся ко второй группе связан с использованием не самой вероятности ошибки, а ее верхней и нижней границ. Подобный метод не зависит от построения алгоритма различения, оценивания и позволяет определить информативность без построения алгоритма различения, оценивания. Поэтому для аппаратно - программной реализации средств оценки информативности был выбран метод оценки информативности на основе анализа граничных выражений для вероятности ошибки и дисперсии оценки параметра.

3. Предлагаемый метод оценки информативности параметров на основе анализа граничных выражений для вероятности ошибки (матрицы Фишера и метода оценки информативности параметров сигнала, состоит в расстояния Бхатачария).

Суть предлагаемого вычисления граничных выражений для вероятности ошибки при использовании непараметрических оценок ПРВ параметров.

Выбор непараметрического способа оценки ПРВ наблюдений продиктован отсутствием данных о виде ПРВ параметров.

При оценивании параметров используется количество информации по Фишеру, при обнаружении, различении - расстояние Бхатачария.

4. Проблемы реализации метода.

При практической реализации описанного выше метода оценки информативности были решены следующие задачи:

1. Выбор метода восстановления ПРВ параметра.
2. Определены:
оптимальное приращение оцениваемого параметра.
оптимальное количество уровней квантования,
оптимальная частота дискретизации.
3. Определен способ вычисления критерия информативности.

1. Выбор метода восстановления ПРВ параметра.

Основными методами непараметрического восстановления ПРВ являются:

- ядерный метод,
- гистограммный метод,
- разложение по ортогональным функциям.

Критериями выбора метода восстановления ПРВ в данной работе были:

- состоятельность и эффективность оценки,
- затраты машинного времени на выполнение процедуры оценки,
- возможность аппаратной реализации выбранного метода.

Наиболее приемлемыми методами на основании обзора методов оценки ПРВ следует считать ядерную оценку и гистограммную оценку. Метод восстановления на основе разложения по ортогональным функциям отличается большой вычислительной сложностью и вследствие чего практической сложностью реализации, кроме того оценки на основе этого метода не обладают свойствами ПРВ (отрицательны и не нормированы к единице).

Ядерные оценки обладают в двое меньшей суммарной среднеквадратической ошибкой в сравнении с методом гистограмм, но требуют значительного объема вычислений, поэтому могут быть

рекомендованы для моделирования оценки информативности по малой выборке. При достаточном объеме выборки, (суммарная среднеквадратическая погрешность составляет около 20%) имеющей место в пассивной радиолокации следует использовать гистограммные оценки ПРВ. Аппаратные измерители ПРВ на основе гистограмм сравнительно легко могут быть реализованы для многомерного случая, что важно при оценке информативности зависимых параметров. Анализатор двумерной ПРВ на основе гистограммной оценки был разработан и изготовлен на нашей кафедре.

2. Определение оптимального числа уровней квантования.

Обзор рекомендаций по выбору числа уровней квантования дал форму в которой ищется оптимальное число уровней квантования. На основе анализа суммарной ошибки оценивания ПРВ была разработана методика определения оптимального числа интервалов квантования случайного процесса с использованием предварительной оценки статистических характеристик наиболее сильно влияющих на оптимальное число уровней квантования: коэффициента пиковости и значений ПРВ и ее производной при аргументе равном половине коэффициента пиковости. Разработанная методика позволяет определить оптимальное число уровней квантования с учетом особенностей вероятностных характеристик исследуемого случайного процесса.

3. Определение оптимальной частоты дискретизации.

Обзор методов выбора частоты дискретизации для восстановления ПРВ показал, что использование коррелированных отсчетов обеспечивает большую точность оценки ПРВ, для случайных процессов корреляционная функция которых отвечает теореме Виленкина. В противном случае необходимо использовать частоту дискретизации, обеспечивающую некоррелированность отсчетов. Большинство типовых корреляционных функций отвечает условиям этой теоремы. Для них существует оптимальное значение частоты дискретизации. На основе анализа дисперсии оценки ПРВ для типовых корреляционных функций были получены расчетные соотношения определяющие оптимальную частоту дискретизации.

4. Определение оптимального приращения измеряемого параметра при вычислении информации по Фишеру.

При вычислении информации по Фишеру численными методами на основе гистограммной оценки существует оптимальное значение приращения по оцениваемому параметру. Анализ составляющих ошибки, обусловленных дисперсией оценки ПРВ и кусочно-линейной аппроксимацией условной ПРВ параметра позволил составить уравнение ошибки для производной по оцениваемому параметру. Решение этого

уравнения относительно приращения по оцениваемому параметру дало его оптимальное значение. Значение оптимального приращения, найденное указанным методом практически совпадает с оптимальным значением полученным методом подбора при статистическом моделировании.

4. Приложение исследуемого метода оценки информативности.

Рассмотренные выше теоретические результаты были применены для оценки информативности параметров при синтезе субоптимального приемника - различителя вида модуляции.

Рассмотрим пример субоптимального определителя вида модуляции сигнала. По отсчетам комплексной огибающей сигнала возможно сформировать следующие статистики мат ожидание, дисперсия, коэффициент эксцесса, коэффициент асимметрии, порядковые статистики определяющие число мод распределения различного порядка ,моментные функции различного порядка и другие.

По этим функциям можно судить о виде модуляции. Обычно выбирается тот параметр, который меняется со сменой типа модуляции хотя бы для двух случаев. Естественно таких параметров может быть несколько. Как видим уже даже для перечисленных параметров сигнала возникает проблема какой же из параметров следует выбрать.

Адекватный выбор и выделение информативных параметров при синтезе приемника играют центральную роль. Именно выделение и выбор информативных параметров определяют как затраты на реализацию приемника так и качество его работы.

С помощью исследуемого метода произведена оценка информативности параметров Стокса и их статистик при различении сигналов по виду модуляции. Путем статистического моделирования подтверждена оценка информативности на основе расчетов по исследуемому методу.

Методика оценки информативности позволила исследовать информативные параметры на устойчивость к мешающим факторам: неизвестное отношение сигнал/шум, неопределенное время задержки между отсчетами для преобразования Стокса, вид кода.

Получена оценка информативности мгновенных значений, огибающей, и фазы для оценивания амплитуды полезного детерминированного сигнала по одномерной и двумерной ПРВ. Оценка информативности огибающей на фоне импульсной помехи показала большую информативность огибающей при малом отношении сигнал помеха в сравнении с гауссовым шумом, что указывает на возможность их амплитудного подавления.

Вывод: Разработанная методика оценки информативности параметров сигнала и созданные на ее базе аппаратно-программные средства являются эффективным инструментом при синтезе приемника в условия априорной неопределенности по основным параметрам сигнала.

5. Постановка задачи.

Имеем N радиосигналов

$$s(t, \vec{\theta}_n(t)) \quad (n = \overline{1, N}) \quad (\text{B-1})$$

являющихся функциями времени и вектора параметров сигналов (ВПС) $\vec{\theta}(t)$:

$$\vec{\theta}(t) = \|\theta_1(t), \dots, \theta_i(t), \dots, \theta_I(t)\|^T \quad (i = \overline{1, I}) \quad (\text{B-2})$$

Индекс n -указывает на принадлежность ВПС $\vec{\theta}(t)$ к n -ому сигналу.

На вход приемника поступает процесс:

$$r(t) = s(t, \vec{\theta}_n(t)) + n(t) \quad (\text{B-3})$$

,где $n(t)$ белый гауссов шум.

На выходе приемника получаем ряд случайных процессов:

$$x_k(t) \quad (k = \overline{1, K}),$$

образующих вектор наблюдения (ВН):

$$\vec{x}(t) = \|x_1(t), \dots, x_k(t), \dots, x_K(t)\|^T$$

Случайные процессы $x_i(t)$ являются результатом преобразования входного случайного процесса $r(t)$ в приемнике и в частности могут представлять собой процессы на выходе различных детекторов.

Требуется определить информативность процессов $x_k(t)$ при решении задач обнаружения и различения сигналов $s(t, \vec{\theta}_n(t))$ и оценивании ВПС $\vec{\theta}_n(t)$.

1. АНАЛИЗ КРИТЕРИЕВ ВЫБОРА ИНФОРМАТИВНЫХ ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛОВ

Выбор вектора информативных параметров сигналов или их математических моделей осуществляется исходя из сформулированной задачи и определенного метода ее решения.

В качестве исходной модели примем модель в виде суммы случайного числа квазислучайных сигналов и шума. Квазислучайные сигнала представимы в комплексной форме и наблюдению доступна многомерная плотность распределения вероятностей. Техническую задачу обнаружения, оценки параметров и классификации математически сформулируем в виде задачи идентификации в широком (определение класса) и узком (определение параметров в рамках заданного класса) смыслах.

Вид вектора информативных параметров и его элементы различны для задач идентификации в широком и узком смыслах [1].

В настоящей главе сделан обзор критериев выбора информативных параметров и описаны критерии, обеспечивающие минимум дисперсии оценки параметров, критерии наблюдаемости а также критерии выбора информативных параметров для задач классификации.

1.1. Идентификация систем и выбор информативных параметров сигналов

1.1.1. Критерии выбора параметров для идентификации в широком смысле.

При идентификации в широком смысле, как правило, методами проверки статистических гипотез решается задача относительно следующих характеристик класса [2]:

- сосредоточенность, распределенность,
- линейность, нелинейность,
- статичность, динамичность,
- стационарность, нестационарность,
- непрерывность, дискретность.

При решении задачи методами дискриминантного анализа используются дискриминантные функции $d_i(\vec{\vartheta})$ от вектора признаков (параметров) $\vec{\vartheta}$, выбираемых так, чтобы для всех значений $\vec{\vartheta}$, соответствующих классу Ω_i , выполнялись неравенства

$$d_i(\vec{\vartheta}) > d_j(\vec{\vartheta}), \quad (i \neq j)$$

При вероятностной классификации $d_i(\vec{\vartheta})$ имеют вид [Ошибка! Источник ссылки не найден.]:

$$d_i(\vec{\vartheta}) = - \sum_{j=1}^q p_j C_{ij} p(\vec{\vartheta} / \Omega_i), \quad (i = \overline{1, q}) \quad (1-1)$$

где p_j - вероятность класса, C_{ij} - потери отнесения i -го класса к j -тому, $p(\vec{\vartheta} / \Omega_i)$ - условная плотность распределения параметров.

Из (1-1) следует, что информативными параметрами при идентификации в широком смысле методами дискриминантного анализа являются: вероятности классов и параметры многомерной условной плотности распределения вероятностей - моментные функции M^n , т. е. $\vec{\vartheta} = [p_j, M^n]^T$. Если множество параметров $\{\vartheta_i\}$ избыточно, то выбор достаточного множества целесообразно производить по критерию максимума информации по Фишеру. Более подробно этот критерий будет рассмотрен в параграфе 2. Достаточность вектора параметров $\vec{\vartheta}$ определяется по критерию идентифицируемость [Ошибка! Источник ссылки не найден.]. Система локально идентифицируема, если информационная матрица имеет полный ранг.

1.1.2. Критерии выбора параметров для идентификации в узком смысле.

Идентификация в узком смысле решает задачу оценки параметров сигналов в рамках заданного класса. Аналогично идентификации в широком смысле при идентификации в узком смысле необходимо выбрать вектор параметров. Оценка параметров возможна при их наблюдаемости. В частности, при представлении сигналов вектором на комплексной плоскости возможны различные варианты вектора параметров, удовлетворяющие условиям наблюдаемости: модуль и фаза, квадратурные составляющие и т. д. Подробное рассмотрение критериев оценки наблюдаемости динамических систем будет рассмотрено в параграфе . Наиболее общим критерием выбора достаточного множества параметров является критерий идентифицируемости [Ошибка! Источник ссылки не найден.], связанный с информационной матрицей Фишера. Наибольшую точность идентификации в узком смысле обеспечивают параметры, обладающие наибольшей информацией по Фишеру.

В заключении отметим, что как видно из обзора основным критерием выбора наиболее информативных параметров является критерий «максимум информации по Фишеру».

1.1.3. Критерий выбора параметров, обеспечивающих наблюдаемость.

Представление сигналов системами дифференциальных или разностных уравнений на основе метода переменных состояния позволяет применить к ним одно из основных понятий теории систем - наблюдаемость. Под свойством наблюдаемости системы понимается возможность однозначного определения всех переменных состояния системы в момент времени t_0 по результатам наблюдения ее выходных сигналов на интервале $[t_0, t_1]$ [3].

Рассмотрим систему, описывающую в дискретном времени в пространстве состояний сигнал и его параметры в виде векторного линейного разностного уравнения

$$X(k+1) = F(k)X(k). \quad (1-2)$$

В уравнении (1-2) элементами N -мерного вектора $X(k)$ являются значения переменных состояния в момент времени t_k , а переходная матрица размером $(N \times N)$ описывает динамику изменения переменных состояния во времени.

Предположим наблюдателю в момент времени t_k доступны значения M -мерного вектора $R(k)$, описываемого уравнением

$$R(k) = H(k)X(k),$$

где $H(k)$ -матрица наблюдения размерности $(M \times N)$.

Такая система будет считаться наблюдаемой на интервале $[t_0, t_1]$, если значения всех элементов вектора $X(k_0)$ могут быть однозначно определены по наблюдениям $R(k)$, $k_0 \leq k \leq k_1$.

Необходимым и достаточным условием такого однозначного определения является условие [3]

$$r_{A(k_0, k_1)} = N, \quad (1-3)$$

где $r_{A(k_0, k_1)}$ - ранг матрицы $A(k_0, k_1)$ вида

$$A(k_0, k_1) = (\begin{matrix} H^T(k_0), & F^T(k_0)H^T(k_0+1), & F^T(k_0+1)F^T(k_0)H^T(k_0+2), \dots, \\ F^T(k_1-1)F^T(k_1-2) \dots F^T(k_0)H^T(k_1) \end{matrix}).$$

Для стационарных систем, т.е. с постоянными во времени переходной

матрицей $F(k) = F$ и матрицей наблюдения $H(k) = H$, условие наблюдаемости (1-3) сводиться к условию невырожденности матрицы

$$A(k_0, k_1) = \begin{pmatrix} H^T & F^T H^T & [F^T]^2 H^T & \dots & [F^T]^{k_1 - k_0 - 1} H^T \end{pmatrix}. \quad (1-4)$$

Для системы описываемой в непрерывном времени дифференциальным N -мерным векторным уравнением

$$\frac{\partial X(t)}{\partial t} = \Phi(t) X(t),$$

и M -мерным вектором наблюдения

$$R(t) = H(t) X(t),$$

необходимым и достаточным условием наблюдаемости является [3] невырожденность матрицы

$$A(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(t, t_0) H^T(t) H(t) \Phi(t, t_0) dt,$$

где матрица $\Phi(t, t_0)$ размерности $(N \times N)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \Phi(t, t_0)}{\partial t} = \Phi(t) \Phi(t, t_0), \quad \Phi(t, t_0) = E,$$

E -единичная матрица.

Пример 1.

Рассмотрим гармонический сигнал вида $x(t) = a \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$. Этот сигнал может быть представлен системой линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial x_1(t)}{\partial t} = x_2(t), \\ \frac{\partial x_2(t)}{\partial t} = -\omega_0^2 x_1(t). \end{cases} \quad (1-5)$$

где $x_1(t) = x(t)$.

В векторной форме система уравнений (1-5) записывается в виде

$$\frac{\partial X(t)}{\partial t} = \Phi X(t),$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1-6)$$

В случае дискретной обработки уравнение (1-6) можно аппроксимировать уравнением вида

$$X(k+1) = FX(k).$$

где $F = \begin{pmatrix} 1 & \Delta \\ -\omega_0^2 \Delta & 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta = t_{k+1} - t_k.$

Рассмотрим постоянную во времени матрицу наблюдения $H = (h_1 \ h_2)$. Тогда определитель матрицы (1-4) равен

$$\det A = \begin{vmatrix} h_1 & h_1 - h_2 \omega_0^2 \Delta \\ h_2 & h_1 \Delta + h_2 \end{vmatrix} = \Delta(h_1^2 + h_2^2 \omega_0^2).$$

Следовательно, наблюдаемость обеспечивается при любых значениях h_1 и h_2 , не равных нулю.

1.1.4. Критерий выбора параметров, обеспечивающих идентифицируемость.

Подходящими критериями идентифицируемости, отвечающими требованиям решаемой задачи являются:

- критерий идентифицируемости на основе предсказательных возможностей модели,
- критерий идентифицируемости, использующий экстремальные свойства функционала качества¹.

В дальнейшем будем использовать последний из перечисленных критериев. В этом случае структура модели называется полностью идентифицируемой, если критерий качества имеет единственный глобальный минимум.

При таком подходе к проблеме идентифицируемости важно, чтобы вся имеющаяся информация (априорная и экспериментальная) оптимальным образом отражалась в критерии качества. Такими свойствами обладают критерии методов максимального правдоподобия и максимальной

¹ Bellman R, Astrom K. J. On structural identifiability. Math. Biosci., 1970, v.7, №3-4, pp.329-339.

апостериорной вероятности. В связи с этим при изучении идентифицируемости целесообразно использовать среднюю функцию неправдоподобия как функцию качества $Q(c)$:

$$Q(c) = -M_y \{ \log p(y / c) \} = - \int_Y \log p(y / c) p(y / c_*) dy \quad (1-7)$$

Тогда условия идентифицируемости системы удастся связать со свойствами информационной матрицы Фишера.

Для того, чтобы c_* была точкой минимума средней функции неправдоподобия, достаточно положительной определенности матрицы вторых производных

$$\begin{aligned} \nabla_{cc}^2 \bar{Q}(c) = & \int_Y \left\{ (\nabla_c \log p(y / c)) (\nabla_c^T \log p(y / c)) \right\} p(y / c_*) dy - \\ & - \int_Y \nabla_{cc}^2 p(y / c) \frac{p(y / c_*)}{p(y / c)} dy. \end{aligned} \quad (1-8)$$

При истинных параметрах $\nabla_{cc}^2 \bar{Q}(c_*)$ совпадает с информационной матрицей Фишера $J_c(c_*)$, поскольку второй член в правой части последнего равенства становится нулевым. Таким образом, система является локально идентифицируемой, если информационная матрица Фишера $J_c(c_*)$ имеет полный ранг.

Функционалы от ИМФ - показатели информативности.

Связь идентифицируемости с ИМФ позволяет ввести количественные критерии идентифицируемости, использующие свойства ИМФ.

Элементы на главной диагонали ИМФ можно считать равными количеству информации о соответствующих параметрах в одном наблюдении. Тогда внедиагональные элементы одного столбца показывают, какая часть информации о данном параметре содержится в информации о других параметрах. Диагонализация ИМФ позволяет определить количество независимой информации о соответствующих параметрах, в которой не содержится информации о других параметрах

Критерием достижимой точности идентификации является мера обусловленности ИМФ, соответствующая данной модели системы. Подобный подход предполагает использование так называемого числа обусловленности матрицы

$$\text{cond}(\mathbf{I}^*) = \frac{\max \lambda_{\mathbf{I}}}{\min \lambda_{\mathbf{I}}} \geq 1,$$

где $\max \lambda_{\mathbf{I}}$ и $\min \lambda_{\mathbf{I}}$ - наибольшее и наименьшее собственные числа ИМФ. Недостаток этого критерия вызван его нечувствительностью к распределению собственных значений матрицы в диапазоне $[\max \lambda_{\mathbf{I}}, \min \lambda_{\mathbf{I}}]$.

Более удобным является следующий критерий информативности вектора параметров

$$v(\mathbf{I}) = n \sqrt{\det \mathbf{I}} (sp \mathbf{I})^{-1},$$

где $n \sqrt{\det \mathbf{I}}$ - среднее геометрическое собственных чисел матрицы $\mathbf{I}$, $(sp \mathbf{I}) / n$ - среднее арифметическое собственных значений матрицы $\mathbf{I}$. По неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим

$$n \sqrt{\det \mathbf{I}} \leq (sp \mathbf{I}) / n,$$

причем равенство имеет место если все собственные числа равны между собой. Таким образом, $v(\mathbf{I}) = 1$, если количество независимой информации о каждом из параметров в одном наблюдении одинаково, и $v(\mathbf{I}) = 0$, если вся информация хотя бы об одном из параметров полностью содержится в информации о других параметрах. Рассмотренный выше критерий показывает с какой точностью может быть решена задача построения модели системы в рамках данной параметрической модели. Равенство критерия нулю указывает на так называемую перепараметризацию модели - завышенную оценку порядка модели. Малые значения критерия соответствуют некорректно поставленным задачам определения модели.

В соответствии с критерием идентифицируемость системы выше, если при общем равном количестве информации о параметрах независимая информация более равномерно распределена между параметрами модели.

1.2. Критерий выбора параметров, дающих минимальную дисперсию оценки.

Минимальную дисперсию оценки параметра сигнала можно получить только при наблюдении наиболее информативных наблюдаемых процессов, т. е. процессов, содержащих максимальную информацию о данном параметре. Потенциальная точность оценки неизвестного параметра по критерию минимума дисперсии оценки определяется неравенством Рао-Крамера.

Пусть допустимая наблюдению величина x имеет ПРВ $p_{\vartheta}(x) = p(x / \vartheta)$, зависящую от N -мерного вектора параметров $\bar{\vartheta}$,

непрерывную и дифференцируемую по $\vec{\vartheta}$. Тогда для матрицы вторых моментов

$$D = \|\sigma_{ij}\| = M_{\vartheta} \left[\left(\hat{\vartheta} - \bar{a}(\vartheta) \right) \left(\hat{\vartheta} - \bar{a}(\vartheta) \right)^T \right] \quad (i, j = \overline{1, N})$$

оценки вектора параметров справедливо неравенство

$$D \geq [E + B(\vartheta)] I^{-1}(\vartheta) [E + B(\vartheta)]^T, \quad (1-9)$$

где $\bar{a}(\vartheta) = M[\hat{\vartheta}]$ - вектор математических ожиданий оценок параметров $\vec{\vartheta}$,

$$B(\vartheta) = (b_{ij}(\vartheta)) = \frac{\partial b_i(\vartheta)}{\partial \vartheta_j}, \quad (i, j = \overline{1, N}),$$

$b_i(\vartheta) = M[\hat{\vartheta}_i - \vartheta_i]$, $i = \overline{1, N}$ - математическое ожидание ошибки оценки параметра ϑ_i ;

E - единичная матрица, $I(\vartheta)$ - информационная матрица Фишера вида

$$I_{ij}(\vartheta) = \int \frac{\partial \ln p(x / \vec{\vartheta})}{\partial \vartheta_i} \frac{\partial \ln p(x / \vec{\vartheta})}{\partial \vartheta_j} p(x / \vec{\vartheta}) dx \quad (1-10)$$

Правая часть (1-9) определяет потенциальную точность оценки параметра $\vec{\vartheta}$ по случайной величине x . Она представляет собой симметричную матрицу размерности $(N \times N)$, элементами главной диагонали которой являются минимально достижимые значения дисперсий σ_i^2 оценки параметров ϑ_i , а остальными элементами - минимально достижимые значения ковариации σ_{ij}^2 оценок параметров ϑ_i и ϑ_j .

Информационная матрица является вырожденной, если ПРВ $p(x / \vec{\vartheta})$ не зависит от одного или нескольких элементов вектора параметров $\vec{\vartheta}$. Это означает, что получить оценку этих параметров по случайной величине x невозможно. Исключив эти параметры из вектора $\vec{\vartheta}$, получим информационную матрицу $I(\vartheta)$ и соответственно матрицу минимальных вторых моментов тех параметров, оценивание которых по случайной величине x возможно.

В одномерном случае дисперсия оценки параметров

$$\sigma_{\hat{\vartheta}}^2 \geq \frac{\left[1 + \frac{\partial b(\vartheta)}{\partial \vartheta} \right]^2}{I(\vartheta)},$$

где $b(\vartheta) = M[\hat{\vartheta} - \vartheta]$,
$$I(\vartheta) = \int \left[\frac{\partial \ln p(x/\vartheta)}{\partial \vartheta} \right]^2 p(x/\vartheta) dx$$

Для дискретного распределения $p_{\vartheta}(x_i)$ неравенство (1-9) справедливо, но входящая в него информационная матрица Фишера имеет вид

$$I(\vartheta) = \sum_k \frac{\partial \ln p_{\vartheta}(x_k)}{\partial \vartheta_i} \frac{\partial \ln p_{\vartheta}(x_k)}{\partial \vartheta_j} p_{\vartheta}(x_k),$$

В случае, если ПРВ $p_{\vartheta}(x)$ не дифференцируема по ϑ или $I(\vartheta) = \infty$, применяется разностное неравенство Чепмена-Робинса [4], согласно которому дисперсия оценки параметра

$$\sigma_{\hat{\vartheta}}^2 \geq \frac{[\Delta a(\vartheta)]^2}{\int \frac{[\Delta p_{\vartheta}(x)]^2}{p_{\vartheta}(x)} dx},$$

где $\Delta a(\vartheta) = a(\vartheta + \Delta) - a(\vartheta)$, $\Delta p_{\vartheta}(x) = p_{\vartheta+\Delta}(x) - p_{\vartheta}(x)$,

В случае несмещенных оценок $\Delta a(\vartheta) = 0$, и

$$\sigma_{\hat{\vartheta}}^2 \geq \frac{\Delta^2}{\int \frac{[\Delta p_{\vartheta}(x)]^2}{p_{\vartheta}(x)} dx},$$

Так как на вход приемника воздействуют случайные процессы, неравенства Рао-Крамера и Чепмена-Робинса [4] применимы для вычисления потенциальной точности оценки неизвестных параметров сигнала по измерению различных входных процессов и для выбора наиболее информативных входных процессов из общего числа доступных наблюдению.

Кроме граничных значений дисперсии оценки неизвестных параметров, получаемых по неравенству Рао-Крамера, существуют и другие: граница Баранкина, граница Бхатачария и т.п. Эти границы в ряде случаев позволяют более точно определить минимально возможные дисперсии оценок, однако их отыскание требует значительно большего объема вычислений.

1.3. Критерии выбора наиболее информативных признаков в задачах классификации

Выбор переменных, характеризующих объекты, является ключевой проблемой при классификации. Эту проблему называют задачей выбора признаков или задачей выбора признакового пространства.

Очевидно, что совокупность признаков должна в наибольшей степени отражать те свойства объектов, которые важны для их распознавания. При этом от размерности признакового пространства в значительной степени зависят вычислительная сложность процедур обучения и принятия решения, достоверность классификации, затраты на получение наблюдений на этапе обучения и принятия решений, вызванные необходимостью измерения требуемых характеристик объектов.

С практической точки зрения требование минимума общей размерности задачи классификации и максимума достоверности оказываются противоречивыми. Действительно, уменьшение количества признаков снижает затраты на проведение измерений и вычислений, но может привести к падению достоверности распознавания. Но если время на обучение и принятие решения ограничено, повышение размерности признакового пространства может оказаться единственным средством увеличения достоверности до требуемого уровня. Это еще раз подчеркивает важность задачи формирования признакового пространства.

Набор исходных признаков формируется до начала классификации из числа доступных измерению характеристик объекта $Y_1, \dots, Y_q$, отражающих существенные для его распознавания свойства. Если объектами распознавания являются сигналы, то в качестве таких характеристик могут быть выбраны параметры их физического представления - амплитуда, частота, скважность, а при пространственной селекции дополнительно дальность и пеленг.

На следующем этапе из первоначального набора пытаются сформировать новый набор $X_1, \dots, X_p$, состоящий из меньшего числа переменных, $p < q$.

Традиционные способы формирования новых признаков в условиях полного априорного знания основаны на максимизации некоторой функции $I(Y_1, \dots, Y_q) = I(\vec{Y})$, называемой критерием и обычно понимаемой как некоторое расстояние между классами в признаковом пространстве. В других случаях критерий $I(\vec{Y})$ выражает «объем» области, занимаемой классами в признаковом пространстве, и новые признаки формируются путем минимизации критерия [5, 6, 7, 8]. По своей сути оба варианта критериев равнозначны. Часто в качестве критерия $I(\vec{Y})$ выступает среднеквадратическая ошибка аппроксимации признаков $Y_1, \dots, Y_q$ с помощью новых признаков $X_1, \dots, X_p$ [6], среднее межклассовое расстояние

[5, 6], внутриклассовый разброс наблюдений [91], энтропия одного класса относительно другого [7].

Проведем краткий анализ известных методов выбора признаков. Широкое распространение имеют методы линейного преобразования исходного пространства признаков $(Y_1, \dots, Y_q) = \vec{Y}$ в новое пространство $(X_1, \dots, X_p) = \vec{X}$

$$X = AY. \quad (1-11)$$

В качестве столбцов матрицы преобразования A выбираются собственные векторы общей ковариационной матрицы Σ рассматриваемой совокупности (при полном априорном знании она известна, в противном случае используется ее оценка полученная при обучении).

Признаки $X_1, \dots, X_p$ обладают при этом следующими полезными свойствами. Во-первых, эффективность каждого признака, т.е. его полезность с точки зрения представления сигнала, определяется соответствующим собственным значением. Для уменьшения числа признаков, признак с наименьшим собственным значением исключается в первую очередь и т.д. Если собственные значения пронумерованы в порядке убывания $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p > 0$, то признаки должны быть упорядочены таким же образом, что позволяет сформировать искомый набор признаков $(X_1, \dots, X_p) = \vec{X}$ меньшей размерности.

Во-вторых, рассматриваемые признаки взаимно некоррелированы.

В-третьих, собственные векторы ковариационной матрицы Σ дают наименьшее значение критерию J_1 среднеквадратической ошибки аппроксимации признаков $(Y_1, \dots, Y_q) = \vec{Y}$ признаками $(X_1, \dots, X_p) = \vec{X}$

$$J_1 = \sum_{i=1}^p \lambda_i \quad (1-12)$$

Если выбран критерий, отличный от среднеквадратической ошибки, также определяют p признаков, соответствующих тем собственным значениям матрицы Σ , которые оказывают наибольшее влияние на значение выбранного критерия $J(\vec{Y})$.

Недостатком рассмотренных критериев является то, что дают противоположные по смыслу рекомендации для выбора признаков. Так, при минимизации внутриклассового разброса наблюдений используется критерий

$$J_2 = \sum_{j=1}^{p'} \lambda_j, \quad (1-13)$$

Требования которого противоречат рассмотренному выше критерию J_1 среднеквадратической ошибки аппроксимации. Причина заключается в отсутствии явной связи критериев, основанных на понятиях расстояния, с основным показателем качества классификации - ее достоверностью. Поэтому бывает трудно отдать предпочтение какому-то критерию и сделать выбор между противоположными рекомендациями.

Отдельного рассмотрения заслуживают критерии, принятые в дискриминантном анализе и представляющие усовершенствованный вариант предыдущих. Их сущность состоит в совместной минимизации внутриклассового разброса наблюдений и максимизации межклассового разброса.

В дальнейшем используем следующие понятия. Матрица рассеяния внутри классов S_k , $k = \overline{1, K}$, показывает разброс сигналов относительно векторов математического ожидания классов

$$S_\omega = \sum_{i=1}^2 P(\omega_i) E \left\{ (X - M_i)(X - M_i)^T / \omega_i \right\} = \sum_{i=1}^2 P(\omega_i) \Sigma_i. \quad (1-14)$$

где $P(\omega_i)$ - априорная вероятность класса ω_i , M_i и Σ_i математическое ожидание и ковариационная матрица i -го класса.

Матрица рассеяния между классами может быть определена выражением

$$S_b = \sum_{i=1}^2 P(\omega_i) \left\{ (M_i - M_0)(M_i - M_0)^T \right\}. \quad (1-15)$$

Вектор M_0 представляет собой мат. ожидание смеси распределений

$$M_0 = \sum_{i=1}^2 P(\omega_i) M_i \quad (1-16)$$

Матрица рассеяния смеси распределений имеет вид

$$S_m = E \left\{ (X - M_0)(X - M_0)^T \right\} = S_\omega + S_b$$

Наиболее часто используются следующие критерии [6]

$$J_3 = \text{tr}(S_2^{-1} S_1), \quad (1-17)$$

$$J_4 = \ln|S_2^{-1}S_1| = \ln\{|S_1|/|S_2|\}, \quad (1-18)$$

$$J_5 = \text{tr}S_1 - \mu(\text{tr}S_2 - c), \quad (1-19)$$

$$J_6 = \text{tr}S_1 / \text{tr}S_2, \quad (1-20)$$

где $\text{tr}S_i$ - след матрицы S_i ($i = \overline{1,2}$).

Относительно этих критериев справедливы следующие замечания:

1. Обычно в качестве S_1 используется матрица S_b , а в качестве S_2 - матрицы S_ω или $S_\omega + S_b$. В критерии J_4 в качестве S_1 и S_2 используются соответственно матрицы $S_\omega + S_b$ и S_ω , т.к. $|S_b| = 0$.
2. Критерий J_4 часто формулируют в виде $|S_1|/|S_2|$. Здесь он берется в логарифмической форме для того, чтобы получить свойство аддитивности для независимых признаков.
3. Смысл критерия J_5 заключается в максимизации $\text{tr}S_1$ при $\text{tr}S_2 = c$,

Критерии J_3 и J_4 инвариантны относительно невырожденного линейного преобразования, критерии J_5 и J_6 зависят от системы координат.

Выбор признаков, максимизирующих данные критерии аналогичен описанному ранее с использованием декоррелирующего преобразования (1-11). Для критериев J_3 , J_4 , J_5 выбираются признаки, соответствующие максимальным собственным значениям матрицы $S_2^{-1}S_1$.

Очевидно, по мере увеличения числа классов эти критерии становятся все менее и менее точными индикаторами различимости классов. Однако это утверждение справедливо и для других критериев. Один из способов преодоления этой трудности - использование по парной классификации.

Критерии рассмотренные выше, являются простыми и выбор оптимальных признаков производится непосредственно. Однако эти критерии имеют один недостаток: они не связаны непосредственно с вероятностью ошибки байесовского классификатора. Критерий выбора признаков, использующий верхнюю границу Чернова ошибки классификации и расстояние Бхатачария, более сложный чем предыдущие, лишен этого недостатка.

Распространенная на случай многих классов процедура вычисления верхней границы вероятности ошибки может быть описана следующим образом.

Пусть ε и ε_{ij} , $i, j = \overline{1, K}$ - общая вероятность ошибки и вероятность ошибки при разделении классов i и j . Тогда

$$\varepsilon \leq \sum_{i>j}^K \sum_{j=1}^K \varepsilon_{ij}.$$

Так как верхняя граница ε_{ij} определяется границей Чернова или расстоянием Бхатачария, то

$$\varepsilon \leq \sum_{i>j}^K \sum_{j=1}^K P(\omega_i)^{1-s_{ij}} P(\omega_j)^{s_{ij}} \int_X p(X / \omega_i)^{1-s_{ij}} p(X / \omega_j)^{s_{ij}} dX, \quad (1-21)$$

где $s_{ij} \in (0,1)$. Оптимальные значения s_{ij} определяются соответствующими парами классов, но для простоты можно положить $s_{ij} = 0,5$.

Воспользовавшись неравенством

$$[P(\omega_i)P(\omega_j)]^{1/2} \leq \frac{1}{2}$$

верхняя граница вероятности ошибки определяется следующим образом:

$$\varepsilon \leq \frac{1}{2} \sum_{i>j}^K \sum_{j=1}^K \int_X [p(X / \omega_i)p(X / \omega_j)]^{1/2} dX, \quad (1-22)$$

Применение критериев, использующих границу Чернова, ограничивается задачами с хорошо определенными ПРВ, для которых критерии допускают явное математическое выражение. Но даже случай выбора признаков для нормальных распределений - здесь значительно более сложная задача, чем использование критериев дискриминантного анализа.

Аналогичной расстоянию Бхатачария мерой разделимости классов является дивергенция, которая представляет собой разность математических ожиданий отношений правдоподобия для двух классов. Дивергенция не имеет близкой связи с вероятностью ошибки. На практике эта мера разделимости классов используется только в случае нормальных распределений, процедура выбора признаков с помощью дивергенции такая же, как и при использовании расстояния Бхатачария [6].

В работе [9] предложено преобразование исходного признакового пространства, которое позволяет заменить q первоначальных признаков одним единственным признаком и при этом обеспечить ту же вероятность правильного различения классов, которая получилась бы при использовании всех q первоначальных признаков для случая двух классов, заданных q -мерными нормальными совокупностями с известными разными средними $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$ с общей ковариационной матрицей Σ . Для этого матрица A в (1-11) представлена в виде

$$A = C\lambda^{-1/2}\Phi,$$

где матрицы A и Φ удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned} CC^T &= I, \\ \Phi^T M^{-1} \Phi &= \lambda^{-1}, \\ C\lambda^{-1/2} \Phi^T (\bar{a}_2 - \bar{a}_1) &= \tilde{a}_2 - \tilde{a}_1 = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{12} - \tilde{a}_{11} \\ \vdots \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

в которых I -единичная матрица размерности $q \times q$, λ -диагональная матрица собственных чисел размерности $q \times q$, $\tilde{a}_1$ и $\tilde{a}_2$ -вектора условных математических ожиданий новых признаков $X_1, \dots, X_q$ при условиях, что выборка наблюдений принадлежит ω_1 или ω_2 соответственно. Ввиду невырожденности ковариационной матрицы Σ матрица Φ существует и единственна. Существование матрицы C доказано, ее можно интерпретировать как поворот координатной системы, получающейся после декоррелирующего преобразования признаков $Y_1, \dots, Y_q$.

Решающее правило зависит только от наблюдаемых значений признака X_1 , если переписать его в переменных

$$Y = \Phi \lambda^{-1/2} C^T X.$$

Поэтому в матрице

$$A = C\lambda^{-1/2} \Phi$$

нужно сохранять только первую строку.

Таким образом, предложенное преобразование признакового пространства позволяет свести многомерную задачу распознавания к одномерной, не снижая достоверность решения и минимизируя вычислительную сложность процедуры принятия решения.

Недостатком данного метода является сложность определения матрицы C .

Вместе с тем пример сведения многомерной задачи распознавания к одномерной позволяет определить перспективы описанных преобразований признакового пространства. Общая идея - в упрощении решающего правила, а инвариантами преобразования должны являться характеристики качества распознавания.

Наращивание числа признаков для повышения достоверности распознавания - еще один путь формирования признакового пространства без применения линейного преобразования исходных признаков $Y_1, \dots, Y_q$.

Такой способ применим в случаях, когда известна зависимость вероятности

ошибочных решений от характеристик различимости классов, таких, например, как расстояние Махаланобиса.

Следует упомянуть также о возможности нелинейного преобразования исходного пространства признаков. Эти методы разрабатываются в связи с тем, линейные преобразования, как правило, не позволяют выделить минимальное число эффективных признаков. Несмотря на это, математические вопросы нелинейных отображений остаются практически не исследованными. К наиболее разработанным можно отнести методы связанные с нахождением «истинной» размерности исходных данных и улучшения разделимости с помощью нелинейного преобразования [6].

В общем виде задачу формирования признакового пространства необходимо ставить исходя из реальной обстановки, из требований распознающей системы в целом. В реальных условиях обычно требуется, чтобы принимаемые системой решения имели гарантированную достоверность, которая достигалась бы при ограничении на стоимость используемого оборудования, энергетических затрат, времени обучения, времени принятия решений и т.д. В связи с этим характеристики достоверности должны быть увязаны с количеством обучающих наблюдений, а также со свойствами выбираемых признаков, их количеством.

Итак, в каждом случае постановки конкретной задачи классификации наиболее подходящий критерий формирования признакового пространства следует выбирать с учетом информации и специфики самих критериев.

2. РАЗРАБОТКА И ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДА ОЦЕНКИ ИНФОРМАТИВНОСТИ ПАРАМЕТРОВ НА ОСНОВЕ АНАЛИЗА ИНФОРМАЦИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

2.1. Критерий информативности параметров сигнала на основе анализа расстояний между распределениями

Обобщенная модель наблюдения.

Рассмотрим следующую систему наблюдения и соответствующую ей модель наблюдения.

Основные составляющие системы наблюдения:

а) Физическая система, являющаяся предметом исследования, способна находиться в некотором определенном числе состояний. В процессе наблюдения не меняет своего состояния, однако от наблюдения к наблюдению изменяет его случайным образом. Эта система моделируется случайной величиной X (случайный объект X) принимающей i значений с вероятностями p_i .

б) Система вероятностного перехода. Состояние этой системы также является случайным и может изменяться во время наблюдения. Кроме того оно может зависеть от состояния в котором находится изучаемая система. Состояние системы вероятностного перехода моделируется векторной случайной величиной $\vec{Y}$. Компоненты вектора $\vec{Y}$ (случайные объекты $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$) являются случайными величинами со специфичными вероятностными свойствами, изменение которых при изменении величины X также различно.

в) Наблюдатель, целью которого является выяснение состояния в котором прибывает случайный объект X по наблюдению состояния системы вероятностного перехода (случайного объекта $\vec{Y}$).

Требуется определить информативность различных параметров вектора наблюдения $\vec{Y}$ о состоянии случайного объекта X .

Модель наблюдения применительно к решению задач статистической радиотехники.

Описанная выше модель наблюдения может быть распространена на описание источников информации и принимаемых сигналов в различных задачах статистической радиотехники. На рис. 2-1 представлена схема такой модели наблюдения.

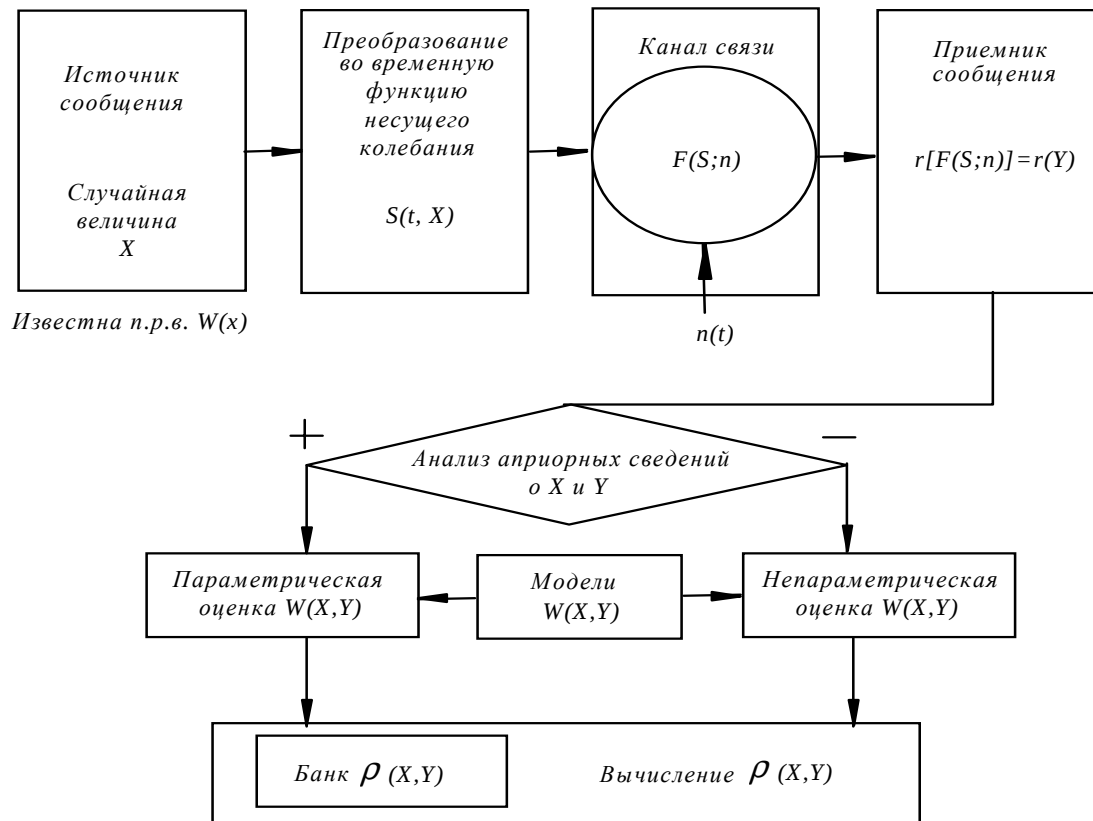


Рис. 2-1.

Источник сообщения в зависимости от типа решаемой задачи моделируется дискретной либо непрерывной случайной величиной X с плотностью распределения вероятностей $W(X)$. Реализация источника сообщений преобразуется во временной сигнал $S(t, X)$, являющийся переносчиком сообщения X . При прохождении по каналу связи сигнал $S(t, X)$ взаимодействует с помехами и шумом $n(t)$ по закону $F(S; n)$. На входе приемника имеется наблюдение $F(S; n) = r(\vec{Y})$, где r модель наблюдения, зависящая от вектора параметров $\vec{Y}$.

1. Статистическая зависимость случайных объектов и информативность параметров наблюдаемого сигнала.

Степень воздействия случайного объекта X на компоненты наблюдения (случайные объекты $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$) различна, т.е. может описываться как строго функциональной зависимостью, так и различной силы стохастической связью.

В случае наличия взаимоднозначной функциональной зависимости между случайным объектом X и случайным объектом $\vec{Y}$ наблюдатель, зная закон функционального соответствия может абсолютно верно определить состояние интересующего объекта X . При наличии стохастической зависимости взаимоднозначного соответствия не существует, поэтому наблюдатель способен определить лишь вероятности состояния объекта X .

При статистической независимости между случайными величинами X и $\vec{Y}$ наблюдатель не имеет возможности узнать что-либо о реализации случайной величины X .

Поскольку компоненты наблюдения (случайные объекты $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$) имеют различную степень связи с исследуемым объектом, то наблюдение определенной компоненты доставляет различную степень осведомленности наблюдателя о состоянии объекта X . Назовем компоненты наблюдения, имеющие наиболее тесную стохастическую связь наиболее информативными компонентами наблюдаемого случайного объекта $\vec{Y}$.

2. Критерии информативности параметров наблюдаемого сигнала.

Статистическая зависимость между случайными величинами X и Y_i в общем случае определяется их совместной плотностью распределения вероятностей $W(X, Y_i)$. Для статистически независимых случайных величин

$$W(X, Y_i) = W(X)W(Y_i). \quad (2-1)$$

При наличии статистической связи

$$W(X, Y_i) \neq W(X)W(Y_i). \quad (2-2)$$

Рассмотрим две гипотезы. Гипотеза H_1 соответствует наличию статистической связи:

$$H_1: W_{H_1}(X, Y_i) \neq W(X)W(Y_i). \quad (2-3)$$

Гипотеза H_2 соответствует статистической независимости

$$H_2: W_{H_2}(X, Y_i) = W(X)W(Y_i). \quad (2-4)$$

Для количественной оценки информативности случайного объекта Y_i необходимо ввести функционал от плотностей совместного распределения вероятностей при рассматриваемых гипотезах, который бы показывал насколько совместное распределение $W_{H_1}(X, Y_i)$ удалено от совместного распределения статистически независимых случайных величин $W_{H_2}(X, Y_i)$.

В математической статистике вводится ряд таких расстояний, показывающих насколько данное распределение P отличается от некоторого другого распределения G [4]. Наиболее существенными из них являются следующие расстояния.

Расстояние Кульбака:

$$\rho_1(P, G) = \int_{N_P} \ln \frac{p(x)}{g(x)} p(x) \mu(dx), \quad (2-5)$$

где N_P - носитель распределения P : $N_P = \{x: p(x) > 0\}$,

Расстояние χ^2 между распределениями P и G :

$$\rho_2(P, G) = \int_{N_P \cup N_G} \frac{(p(x) - g(x))^2}{p(x)} \mu(dx). \quad (2-6)$$

Расстояние Хеллингера:

$$\rho_3(P, G) = \int_{N_P \cup N_G} (\sqrt{p(x)} - \sqrt{g(x)})^2 \mu(dx). \quad (2-7)$$

При равенстве распределений P и G данные расстояния равны нулю, по мере увеличения различий в распределениях расстояния также увеличиваются. Будем использовать данные функционалы для количественной оценки информативности случайного объекта Y_i путем вычисления расстояния от распределения $W_{H_1}(X, Y_i)$ до распределения $W_{H_2}(X, Y_i)$:

$$\begin{aligned} P &\equiv W_{H_1}(X, Y_i) = W(X, Y_i), \\ G &\equiv W_{H_2}(X, Y_i) = W(X)W(Y_i). \end{aligned} \quad (2-8)$$

Из (2-5), (2-6), и (2-7) используя (2-8) получаем соответствующие выражения критериев информативности.

Критерий информативности для расстояния Кульбака (2-5)

$$\rho_1(X, Y_i) = \int_{N_{W(X, Y_i)}} \ln \frac{W(X, Y_i)}{W(X)W(Y_i)} W(X, Y_i) \mu(dxdy), \quad (2-9)$$

Критерий информативности для расстояния χ^2 (2-6)

$$\rho_2(X, Y_i) = \int_{N_{W(X, Y_i)} \cup N_{W(X)W(Y_i)}} \frac{(W(X, Y_i) - W(X)W(Y_i))^2}{W(X, Y_i)} \mu(dxdy). \quad (2-10)$$

Критерий информативности для расстояния Хеллингера (2-7):

$$\rho_3(X, Y_i) = \int_{N_{W(X, Y_i)} \cup N_{W(X)W(Y_i)}} \left(\sqrt{W(X, Y_i)} - \sqrt{W(X)W(Y_i)} \right)^2 \mu(dx dy). \quad (2-11)$$

Из выше изложенного следует алгоритм оценки информативности параметров наблюдаемого сигнала (рис. 1). Он сводится к анализу априорных сведений о распределениях случайных величин X и Y_i , в зависимости от объема априорных сведений к параметрической или непараметрической оценке плотности совместного распределения $W(X, Y_i)$ и вычислению расстояния между распределениями.

3. Связь критериев информативности с информацией по Фишеру и взаимной информацией по Шеннону.

Приведенный выше критерий информативности Кульбака (2-9) есть не что иное как количество информации по Шеннону $I(X, Y_i)$ в случайном объекте Y_i о случайном объекте X [10]

$$I(X, Y_i) = \rho_1(X, Y_i). \quad (2-12)$$

Приведенные критерии информативности связаны с количеством информации по Фишеру $I(\theta)$ о параметре θ в распределении P_θ [4]

$$I(\theta) = M \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \log P_\theta \right)^2 \right\}$$

Рассмотрим параметрический случай распределений P и G :

$$\begin{aligned} P &= W(X, Y_i) = P_\theta, \\ G &= W(X)W(Y_i) = P_{\theta+\Delta} \end{aligned} \quad (2-13)$$

Тогда критерий информативности Хеллингера $\rho_3(X, Y_i)$ связан с информацией по Фишеру $I(\theta)$ соотношением [4]

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\rho_3(X, Y_i)}{\Delta^2} = \frac{I(\theta)}{4}. \quad (2-14)$$

4. Пример использования метода: информативность огибающей и фазы сигнала в задаче обнаружения.

Определим информативность параметров принимаемого сигнала при решении задачи обнаружения детерминированного сигнала.

В начале рассмотрим канал с аддитивным гауссовским шумом $n(t)$. Исследуемая система (случайный объект X) является двоичной случайной величиной, которая принимает значения "S" и "0" (соответствующие наличию и отсутствию полезного сигнала $s(t)$) с вероятностями p и q соответственно.

Наблюдением (объект $\bar{Y}$ в рассмотренной модели наблюдения) является квазигармоническое колебание $r(t)$, определяемое двумя параметрами: огибающей $a(t)$ (случайный объект Y_1) и медленно флуктуирующей фазой $\phi(t)$ (случайный объект Y_2) (несущая частота ω_0 считается заданной)

$$r(t) = a(t) \cos(\omega_0 t + \phi(t)). \quad (2-15)$$

Когда объект X находится в состоянии "0" наблюдение представляет собой узкополосный гауссов шум $n(t)$:

$$r(t) = n(t) = N(t) \cos(\omega_0 t + \Theta(t)). \quad (2-16)$$

огибающая $r(t)$ совпадает с огибающей шума, а фаза $\phi(t)$ с медленно изменяющейся фазой $\Theta(t)$ шума:

$$\begin{aligned} a(t) &= N(t), \\ \phi(t) &= \Theta(t). \end{aligned} \quad (2-17)$$

В этом случае распределения огибающей $a(t)$ и медленно изменяющейся фазы $\phi(t)$ в совпадающие моменты времени t_1 описываются релеевским и равномерным распределенными соответственно [11]

$$\begin{aligned} p_1(a(t_1) / 0) &= p_1(a / 0) = \frac{a}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right), \\ p_1(\phi(t_1) / 0) &= p_1(\phi / 0) = 1 / 2\pi. \end{aligned} \quad (2-18)$$

В случае состояния S наблюдение представляет собой аддитивную смесь гармонического сигнала и шума

$$\begin{aligned}
r(t) &= n(t) + s(t) = \\
&= N(t) \cos(\omega_0 t + \Theta(t)) + S \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = \\
&= \sqrt{S^2 + N^2 + 2SN \cos \Theta} \cos \left[\omega_0 t + \arctg \frac{N \sin \Theta}{S + N \cos \Theta} \right].
\end{aligned} \tag{2-19}$$

Распределения огибающей $a(t)$ и медленно изменяющейся фазы $\phi(t)$ в совпадающие моменты времени t_1 описываются выражениями [11]:

$$\begin{aligned}
p_1(a(t_1) / S) &= p_1(a / S) = \frac{a}{\sigma^2} \exp \left(-\frac{a^2 + S^2}{2\sigma^2} \right) I_0 \left(\frac{aS}{\sigma^2} \right), \\
p_1(\phi(t_1) / S) &= p_1(\phi / S) = \frac{1}{2\pi} \exp \left(-\frac{S^2}{2\sigma^2} \right) + \frac{S \cos \phi}{\sigma \sqrt{2\pi}} F \left[\frac{S}{\sigma} \cos \phi \right] \exp \left(-\frac{S^2}{2\sigma^2} \sin^2 \phi \right).
\end{aligned} \tag{2-20}$$

Плотности $p_1(a / S)$ и $p_1(\phi / S)$ для различного отношения сигнал-шум $q = S / \sigma$ показаны на рис. 2-2.

Используя критерий информативности Кульбака (2-9) определим информативность огибающей $a(t)$ и фазы $\phi(t)$. Поскольку плотности (2-18), (2-20) являются условными необходимо преобразовать выражение (2-9). Применительно к рассматриваемой задаче обнаружения (2-9) приводится к виду

$$\rho_1(X, Y_i) = -(p \log p + q \log q) - p \int_{Y_i} p(Y_i / S) \log \left[1 + \frac{q}{p} \frac{p(Y_i / 0)}{p(Y_i / S)} \right] dY_i - q \int_{Y_i} p(Y_i / 0) \log \left[1 + \frac{p}{q} \frac{p(Y_i / S)}{p(Y_i / 0)} \right] dY_i. \tag{2-21}$$

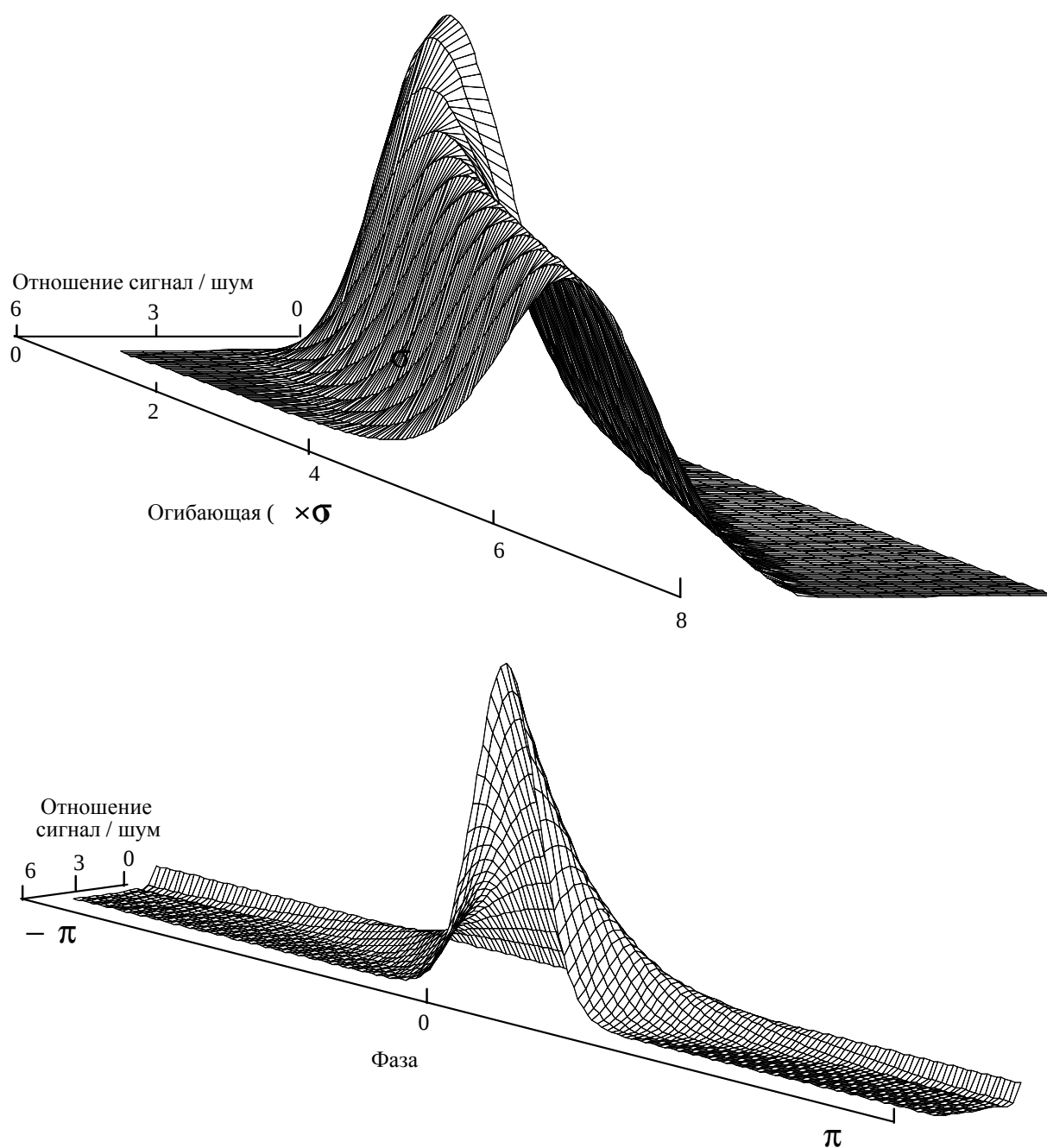


Рис. 2-2

Информативность огибающей $\rho_1(X, a)$ и фазы $\rho_1(X, \phi)$, рассчитанные по (2-21) с помощью численного интегрирования для различных отношений сигнал-шум представлены на рис. 2-3.

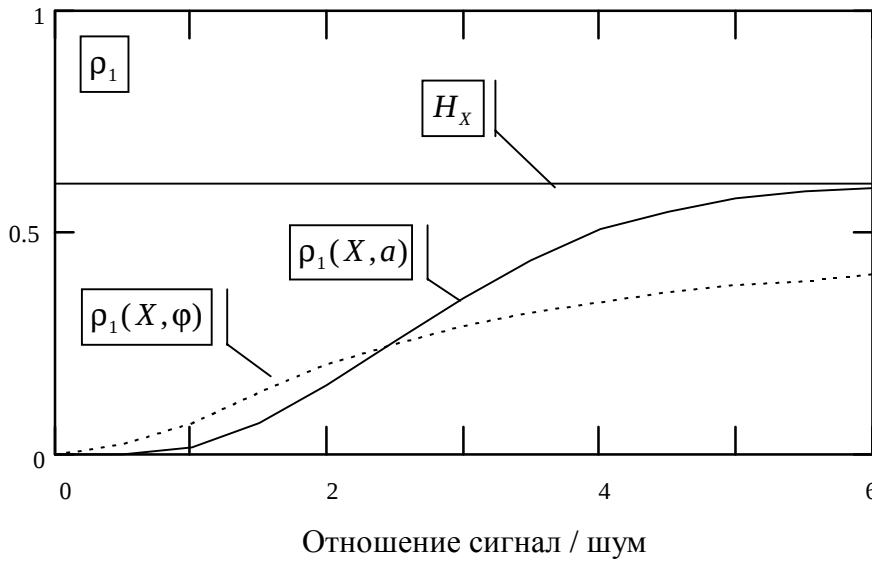


Рис. 2-3

Далее, определим изменение информативности огибающей для негауссовского аддитивного канала.

В качестве модели вероятностного описания огибающей при негауссовских помехах будем использовать плотность распределения вероятностей огибающей для помех класса А, полученную в работе Миддлтона [12], на основе физической модели источников помех, распределенных в плоскости или в пространстве и излучающих случайные импульсы:

$$p_1(a/0) = e^{-A} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{m!} \frac{a}{\sigma_m^2} \exp\left[-\frac{a^2}{2\sigma_m^2}\right], \quad (2-22)$$

где A -индекс перекрытия, определяемый как среднее число импульсов, приходящихся в единицу времени, умноженное на их длительность. С увеличением A помеха приближается к гауссовской, а ее огибающая к релеевской; Γ'_A -отношение интенсивности гауссовской компоненты помехи к интенсивности импульсной негауссовской компоненты. В зависимости от значения параметров A и Γ'_A получаются различные распределения вероятностей, хорошо согласующиеся с экспериментом.

В случае состояния S огибающая описывается суммой обобщенных релеевских распределений с нарастающей дисперсией, аналогично (2-22):

$$p_1(a/S) = e^{-A} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{A^m}{m!}\right) \frac{2a}{\sigma_m^2} \exp\left[-\frac{(a^2 + S^2)}{\sigma_m^2}\right] I_0\left(\frac{2aS}{\sigma_m^2}\right), \quad (2-23)$$

Результаты расчета информативности огибающей с использованием (2-21) для различных значений параметров модели представлены на рис. 2-4.

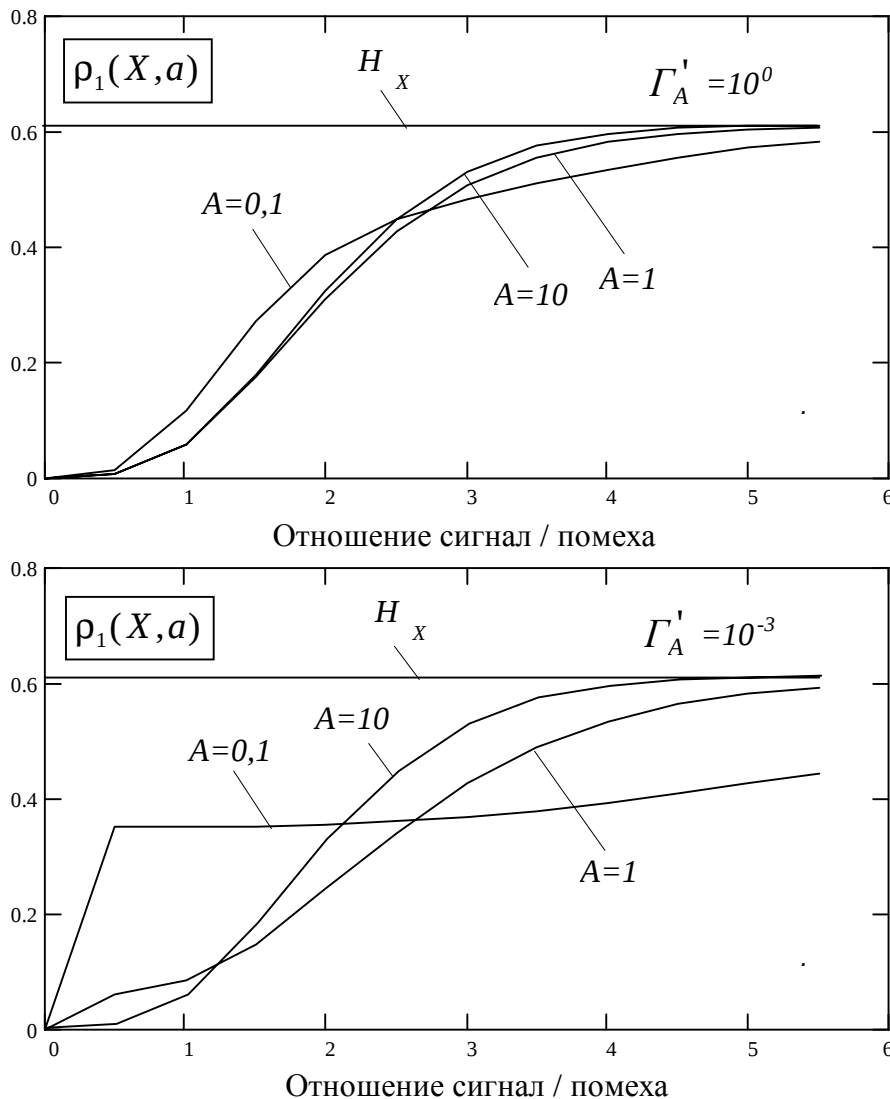


Рис. 2-4

Графики свидетельствуют о значительном увеличении информативности огибающей в сравнении с гауссовым каналом по мере увеличения интенсивности негауссовой составляющей помехи при небольших отношениях сигнал-помеха (менее 7 дБ) и уменьшении информативности при большом отношении сигнал-помеха (более 7 дБ).

2.2. Критерий информативности параметров сигналов на основе анализа информационной матрицы Фишера и ее свойств

2.2.1. Свойства информационной матрицы Фишера, как критерия информативности

Желательно, чтобы критерий информативности удовлетворял ряду требований [6]. Проверка предлагаемого критерия на соответствие этим требованиям облегчает его использование.

Свойство аддитивности по отношению к независимым признакам.

При взаимной независимости параметров для критерия обладающего свойством аддитивности информативность по вектору параметров равна сумме информативностей каждого параметра

$$c(\vec{X}) = \sum_{i=1}^l c(x_i). \quad (2-24)$$

Проверим свойство аддитивности информации по Фишеру. Рассмотрим вектор из двух параметров

$$\vec{X} = \|x_1 \quad x_2\|. \quad (2-25)$$

Запишем выражение для количества информации по Фишеру в векторе $\vec{X}$

$$I_{\vec{X}}(\theta) = \int \int_{x_1 x_2} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} p(x_1, x_2 / \theta) \right]^2 \frac{1}{p(x_1, x_2 / \theta)} dx_1 dx_2 \quad (2-26)$$

Совместная ПРВ вектора $\vec{X}$ в случае независимости его элементов равна произведению ПРВ каждого элемента x_i

$$p(x_1, x_2 / \theta) = p(x_1 / \theta) p(x_2 / \theta). \quad (2-27)$$

С учетом этого количество информации по Фишеру

$$\begin{aligned}
I_{\bar{X}}(\theta) &= \int \int_{x_1 x_2} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (p(x_1 / \theta) p(x_2 / \theta)) \right]^2 \frac{1}{p(x_1 / \theta) p(x_2 / \theta)} dx_1 dx_2 = \\
&= \int \int_{x_1 x_2} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (p(x_1 / \theta)) p(x_2 / \theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (p(x_2 / \theta)) p(x_1 / \theta) \right]^2 \frac{1}{p(x_1 / \theta) p(x_2 / \theta)} dx_1 dx_2 = \\
&= \int \int_{x_1 x_2} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} p(x_1 / \theta) \right]^2 \frac{1}{p(x_1 / \theta)} p(x_2 / \theta) dx_1 dx_2 + \\
&+ \int \int_{x_1 x_2} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} p(x_2 / \theta) \right]^2 \frac{1}{p(x_2 / \theta)} p(x_1 / \theta) dx_1 dx_2 + \\
&+ 2 \int \int_{x_1 x_2} \frac{\partial}{\partial \theta} p(x_1 / \theta) \frac{\partial}{\partial \theta} p(x_2 / \theta) dx_1 dx_2 = \\
&= I_{x_1}(\theta) + I_{x_2}(\theta) + 2 \left[\int_{x_1} \frac{\partial}{\partial \theta} p(x_1 / \theta) dx_1 \right] \left[\int_{x_2} \frac{\partial}{\partial \theta} p(x_2 / \theta) dx_2 \right].
\end{aligned}
\tag{2-28}$$

Каждый из интегралов в третьей части последнего выражения равен нулю из условия нормировки ПРВ. Следовательно

$$I_{\bar{X}}(\theta) = I_{x_1}(\theta) + I_{x_2}(\theta) \tag{2-29}$$

Вывод.

Информация по Фишеру обладает свойством аддитивности по отношению к независимым параметрам.

Пример. Огибающая и фаза смеси детерминированного сигнала и гауссова шума являются независимыми параметрами. Количество информации по Фишеру об амплитуде сигнала в совместном наблюдении огибающей и фазы не зависит от отношения сигнал/шум и равно величине обратной дисперсии гауссова шума (кривая на рис). Суммарное количество информации в огибающей и фазе (кривая рис) совпадает с количеством информации по Фишеру при совместном их наблюдении.

2.2.2. Расчет информативности параметров сигнала с использованием аналитических выражений для плотности распределения

Информативность параметров сигнала при учете распределения на выходе детектора в один момент времени.

Определим информативность параметров (мгновенного значения, огибающей и фазы) сигнала при анализе одномерной плотности распределения.

Информативность мгновенного значения, огибающей и фазы сигнала $s(t) = a(t) \cos[\omega_s t + \varphi_s(t)]$ будем определять по количеству информации Фишера об оцениваемом параметре распределения θ :

$$I(\theta) = \int \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \ln p(x / \theta) \right]^2 p(x / \theta) dx \quad (2-30)$$

где x - параметр узкополосного колебания, а θ - оцениваемый параметр распределения $p(x / \theta)$.

Случайный процесс $r(t)$ на входе приемника образован суммой полезного детерминированного гармонического сигнала

$$s(t) = a(t) \cos[\omega_s t + \varphi_s(t)] \quad (2-31)$$

и белого гауссова шума:

$$r(t) = a(t) \cos[\omega_s t + \varphi_s(t)] + n(t) \quad (2-32)$$

Входной процесс $r(t)$ подлежит предварительному усилению и фильтрации в преддетекторном усилителе (УПЧ) на промежуточной частоте ω_{IF} . Полоса пропускания УПЧ предполагается много больше ширины спектра сигнала $s(t)$, для неискаженной передачи огибающей, фазы и мгновенных значений входного процесса линейной частью приемника. Далее огибающая, фаза, и мгновенные значения воспроизводятся на выходе соответствующих детекторов (рис. 2-5).

Описанный метод предполагает несогласованную с сигналом линейную часть приемника и относится к детекторным методам обработки сигналов.

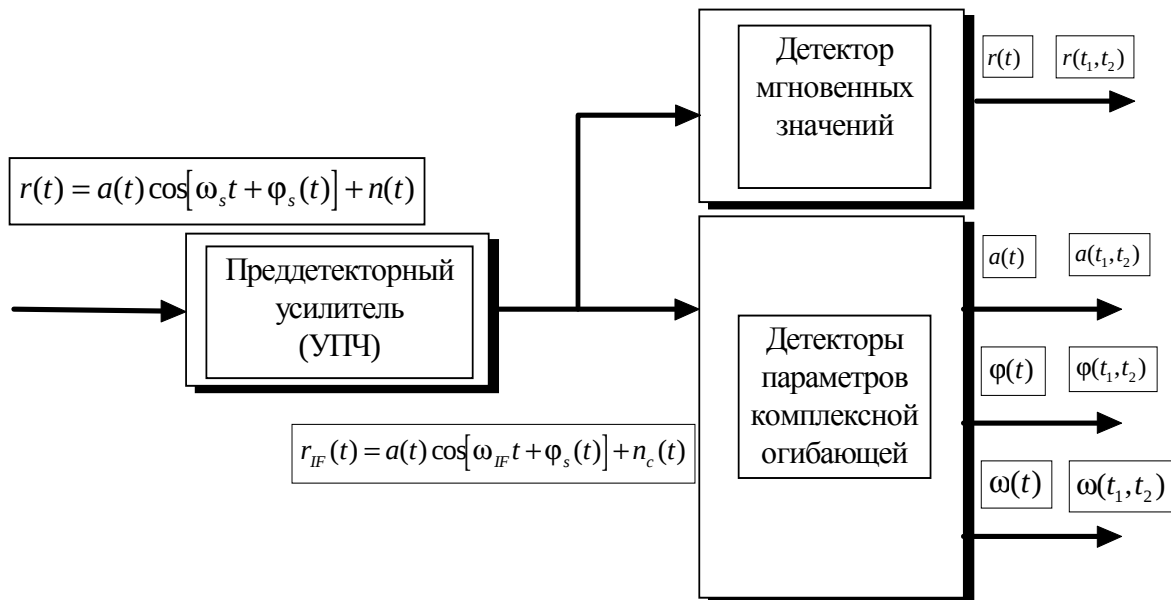


Рис. 2-5

Информативность мгновенных значений при оценивании амплитуды сигнала.

Мгновенное значение $r_1 = r(t_1)$ в случайный момент времени является случайной величиной с ПРВ:

$$p(r_1) = \frac{1}{\pi \sigma_n \sqrt{2\pi}} \int_{-a_1}^{a_1} \frac{1}{\sqrt{a_1^2 - y^2}} \exp\left[-\frac{(r_1 - y)^2}{2\sigma_n^2}\right] dy, \quad (2-33)$$

Информация о величине амплитуды $a_1 = a(t_1)$ полезного сигнала, содержащаяся в мгновенном значении r_1 определяется по (2-30) и равна:

$$I(a_1) = \frac{c^2}{a_1^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{h_2^2(y, c)}{h_1(y, c)} dy, \quad (2-34)$$

где $c = \frac{a_1}{\sigma_n}$ - отношение сигнал/шум по напряжению,

$$h_1(y, c) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \exp\left[-\frac{(y - c \cos \varphi)^2}{2}\right] d\varphi,$$

$$h_2(y, c) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (y - c \cos \varphi) \cos \varphi \exp\left[-\frac{(y - c \cos \varphi)^2}{2}\right] d\varphi.$$

График количества информации по Фишеру $I(a_1)$ по мгновенному значению процесса $r(t)$ от отношения сигнал/шум приведен на рис. 2-6

(кривая 1), а нижней границы дисперсии оценки, нормированный к квадрату амплитуды a_1^2 на рис. 2-7 (кривая 1).

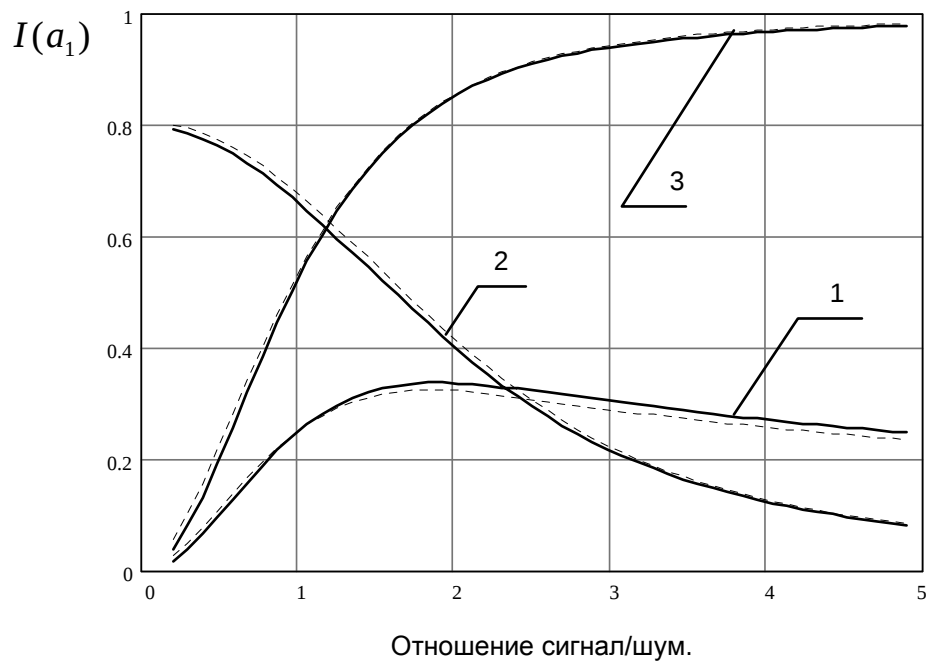


Рис. 2-6

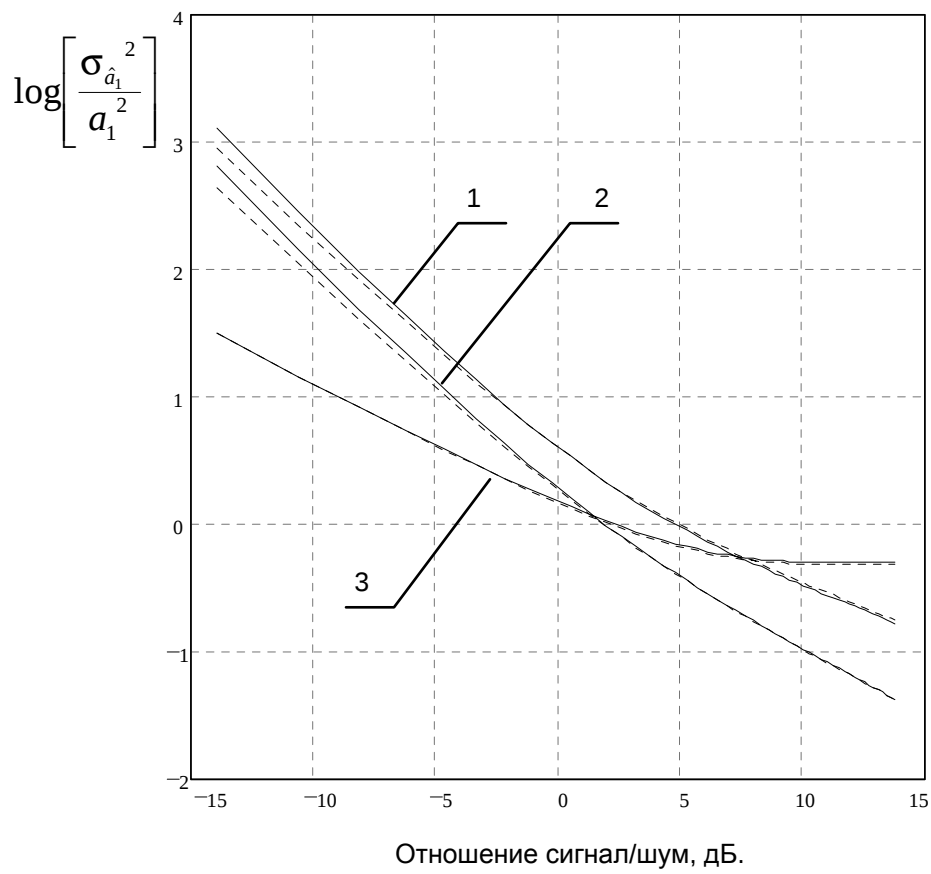


Рис. 2-7

Информативность огибающей при оценивании амплитуды сигнала.

Огибающая $e_1 = e(t_1)$ процесса $r(t)$ распределена по обобщенному закону Релея

$$p(e_1) = \frac{e_1}{\sigma_n^2} \exp\left[-\frac{e_1^2 + a_1^2}{2\sigma_n^2}\right] I_0\left(\frac{a_1 e_1}{\sigma_n^2}\right) \quad (2-35)$$

Можно показать, что информация по Фишеру в огибающей при оценивании амплитуды сигнала равна:

$$I(a_1) = \frac{c^2}{a_1^2} \exp\left[-\frac{c^2}{2}\right] \int_0^\infty y \exp\left[-\frac{y^2}{2}\right] \frac{[-cI_0(cy) + y h_3(y, c)]^2}{I_0(cy)} dy, \quad (2-36)$$

где $h_3(y, c) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos \phi \exp[cy \cos \phi] d\phi$.

Результат расчета количества $I(a_1)$ по отсчету огибающей представлен на рис. 2-6 (кривая 2), нижней границы дисперсии оценки на рис. 2-7 (кривая 2).

Как видно из рис. 2-6 $\log\left(\frac{\sigma^2_{\hat{a}_1}}{a_1^2}\right)$ как для оценки по огибающей так и

по мгновенным значениям почти линейно уменьшается с ростом отношения сигнал/шум, а оценка амплитуды сигнала по огибающей потенциально более точная, чем оценка по мгновенному значению.

Информативность фазы при оценивании амплитуды сигнала.

Распределение фазы $\theta_1 = \theta(t_1)$ процесса $r(t)$ описывается соотношением:

$$p(\theta_1) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{c^2}{2}\right) + \frac{c}{\sqrt{2\pi}} \cos(\theta_1 - \theta_s) \Phi[c \cos(\theta_1 - \theta_s)] \exp\left[-\frac{c^2}{2} \sin^2(\theta_1 - \theta_s)\right], \quad (2-37)$$

где $\theta_s = w(t_1)t_1 + \phi(t_1)$ - полная фаза сигнала в момент времени t_1 , $\Phi(y)$ - интеграл Лапласа.

Плотность распределения фазы (2-37) зависит как от полной фазы сигнала θ_s , так и от его амплитуды, следовательно по измерениям фазы процесса $r(t)$, можно оценить фазу и амплитуду полезного сигнала.

Информация об амплитуде сигнала содержащаяся в фазе после подстановки (2-37) в (3-30) и нахождения производной дает:

$$I(a_1) = \frac{1}{\pi \sigma_n^2} \exp \left[-\frac{c}{2} \right] \int_0^\pi \frac{[h_4(y, c)(1 - c^2 \sin^2(y)) - c \sin^2(y)]^2}{1 + c h_4(y, c)} dy, \quad (2-38)$$

$$\text{где } h_4(y, c) = \sqrt{2\pi} \cos y \Phi(c \cos(y)) \exp \left[\frac{c^2}{2} \cos^2(y) \right],$$

На рис. 2-6 и 2-7 (кривая 3) приведены результаты расчета количества информации по Фишеру и нижней границы дисперсии оценки амплитуды сигнала по фазе. Кривая для нормированной нижней границы дисперсии оценки амплитуды $\log \left(\frac{\sigma_{\hat{a}_1}^2}{a_1^2} \right)$ при ее оценивании по фазе пересекает ту же

кривую при оценивании по огибающей при отношении сигнал/шум 1,2 дБ, а с ростом отношения/шум асимптотически стремиться к величине $\log 2$. Таким образом, никакой алгоритм оценки амплитуды по измерению фазы даже при неограниченном увеличении отношения сигнал/шум не может дать оценку с дисперсией меньшей $\sigma_{\hat{a}_1}^2 = \frac{a_1^2}{2}$.

Информативность параметров сигнала при учете распределения в два момента времени.

Оценка информативности параметров сигнала с учетом их одномерного распределения предполагает построение оценок по независимым наблюдениям этих параметров. Такое предположение является ограничительным в случае оценок по коррелированным наблюдениям. Основных причин коррелированности наблюдений две:

- период дискретизации параметра сигнала меньше, чем время корреляции параметра сигнала, определяемое полосой пропускания УПЧ,
- наличие узкополосных и полосовых гауссовых помех на входе приемника.

Информативность огибающей при оценивании амплитуды сигнала.

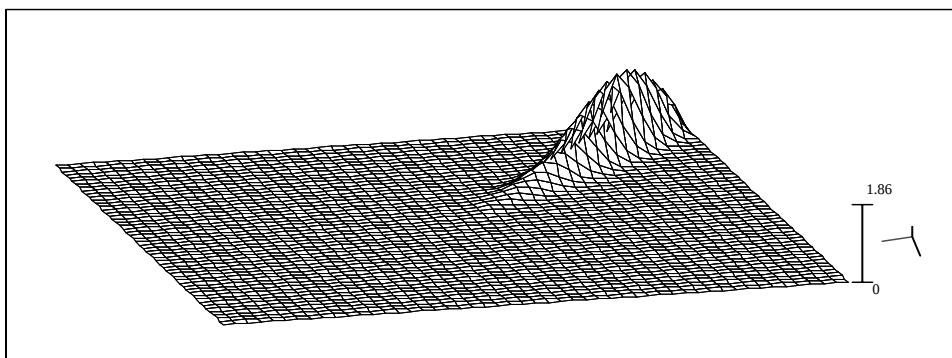
Двумерная ПРВ огибающей процесса $r(t)$ определяется выражением [11]:

$$\begin{aligned}
p(e_1, e_2, \tau) = & \frac{e_1 e_2}{\sigma_n^4 (1 - R_0^2)} \exp \left[-\frac{e_1^2 + e_2^2}{2\sigma_n^2 (1 - R_0^2)} \right] \exp \left[-\frac{a_1^2}{\sigma_n^2 (1 - R_0^2)} \right] \times \\
& \times \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m I_m \left[\frac{R_0 e_1 e_2}{\sigma_n^2 (1 - R_0^2)} \right] I_m \left[\frac{a_1 e_1}{\sigma_n^2 (1 + R_0)} \right] I_m \left[\frac{a_1 e_2}{\sigma_n^2 (1 + R_0)} \right],
\end{aligned} \tag{2-39}$$

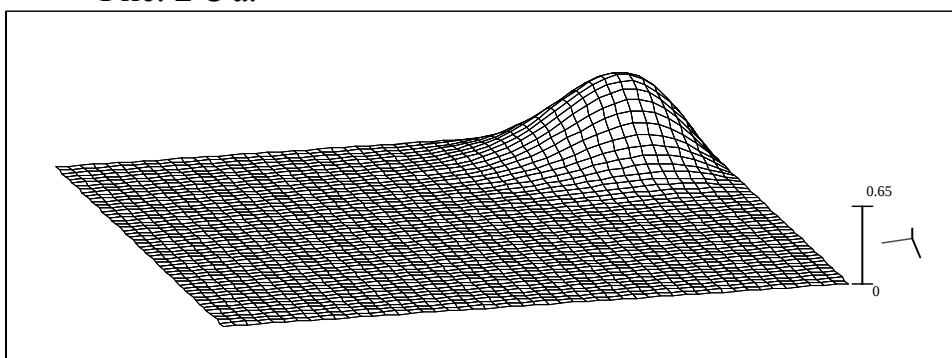
где $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_m = 2$, $m > 0$, а $R_0^2(\tau) = R_c(\tau)^2 + R_s(\tau)^2$. Через $R_c(\tau)$ и $R_s(\tau)$ - обозначены автокорреляционная и взаимокорреляционная функция квадратурных составляющих процесса $r(t)$. Далее будем полагать симметричной спектральную плотность мощности шума. При этом: $R_s(\tau) = 0$, $R_0(\tau) = R_c(\tau)$.

Вид поверхностей $p(e_1, e_2, \tau)$ для малого отношения сигнал/шум при сильной и слабой корреляции e_1 и e_2 показан на рис. 2-8 а и 2-8 б соответственно, а для больших отношений сигнал шум на рис. 2-8 в и 2-8 г.

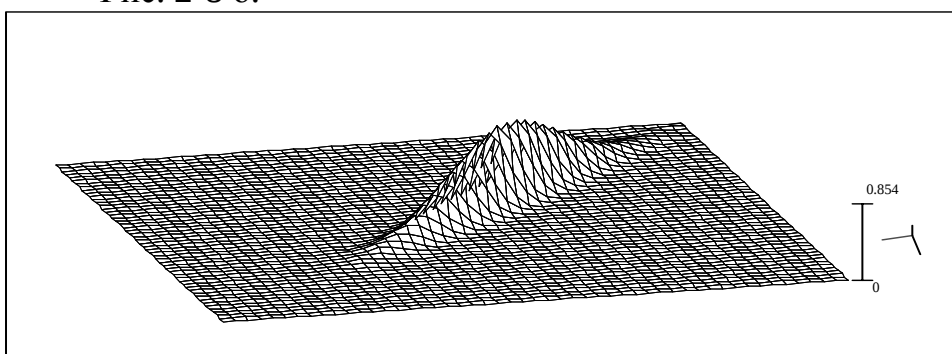
Аналитическое выражения для $I(a_1, a_2)$ получить не удастся, поскольку (2-29) не выражается через элементарные функции. Для расчета $I(a_1, a_2)$ воспользуемся численными методами. Шаг дифференцирования по аргументу ПРВ выберем из условия приближения количества информации $I(a_1)$, полученного численным методом к $I(a_1)$, полученному из имеющихся аналитических выражений (2-34), (2-36), (2-38). Кривые для $I(a_1)$, полученные численным методом для выбранного шага по аргументу показаны на рис. 2-6 и рис. 2-7 штриховыми линиями. Число членов ряда по m в (2-39) выбрано равным 8, что соответствует максимальной разности ПРВ при m равным 9 и 8 менее 0,01.



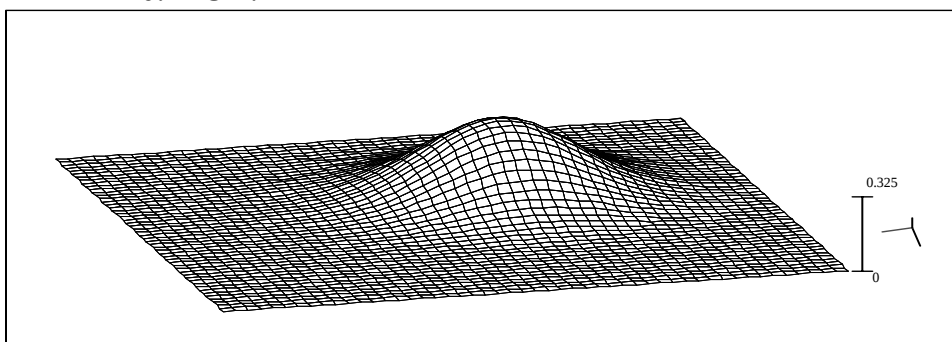
Отношение сигнал/шум=0,5 коэффициент корреляции=0.97
Рис. 2-8 а.



Отношение сигнал/шум=0,5 коэффициент корреляции=0.1
Рис. 2-8 б.



Отношение сигнал/шум=3 коэффициент корреляции=0.97
Рис. 2-8 в.



Отношение сигнал/шум=3 коэффициент корреляции=0.1
Рис. 2-8 г.

Зависимости количества информации по Фишеру по двумерной ПРВ на один отсчет $I(a_1, a_2)/2$ от отношения сигнал/шум для ряда коэффициентов корреляции приведены на рис. 2-9. Для сравнения на том же графике показана кривая 1 для $I(a_1)$ при независимых наблюдениях, а также предел $I(a_1, a_2)/2$ в случае детерминированной зависимости: $R_0(\tau) = 1$.

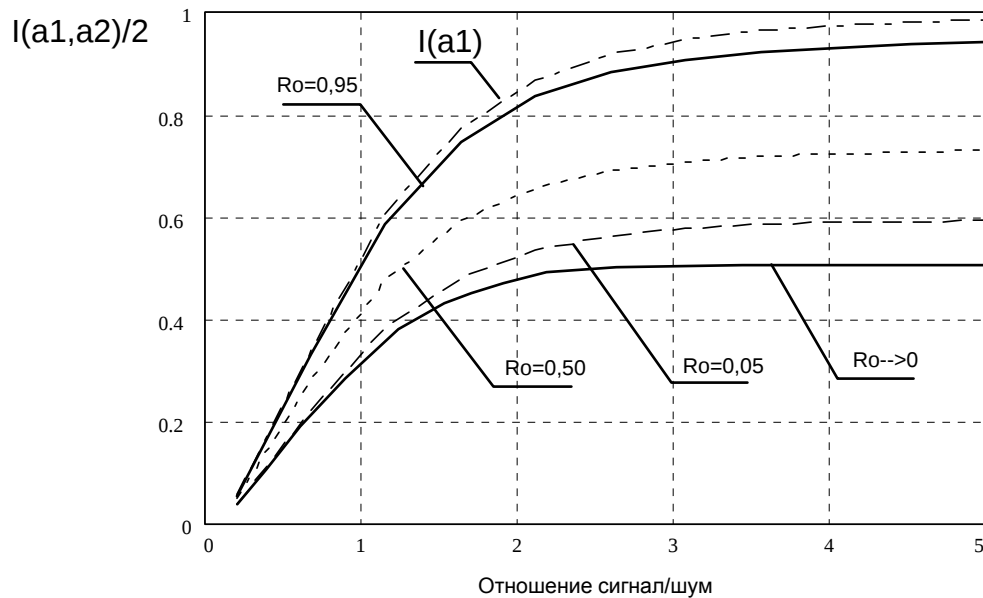


Рис. 2-9.

Пример. Определим количество информации по Фишеру на один отсчет для УПЧ с гауссовой передаточной характеристикой:

$$|K(j\omega)|^2 = K_1^2 \exp \left[-\pi \left(\frac{f - f_0}{\Delta f} \right)^2 \right]$$

Спектральная плотность шума на выходе УПЧ: $S(f) = N_0 |K(j\omega)|^2$. Такой спектральной плотности соответствует корреляционная функция шума на выходе УПЧ:

$$k(\tau) = \sigma^2 \exp \left[-\pi (\Delta f \tau)^2 \right] \cos(2\pi f_0 \tau)$$

$$\sigma^2 = K_1^2 N_0 \Delta f$$

Корреляционная функция квадратурных составляющих:

$$R_0(\tau) = \exp \left[-\pi (\Delta f \tau)^2 \right] \text{ (кривая 1 на рис. 2-10).}$$

На рис. 2-10 показано семейство зависимостей количества информации по Фишеру на один отсчет от нормированной задержки $\tau_n = \tau/\Delta f$ для ряда отношений сигнал/шум ϵ .

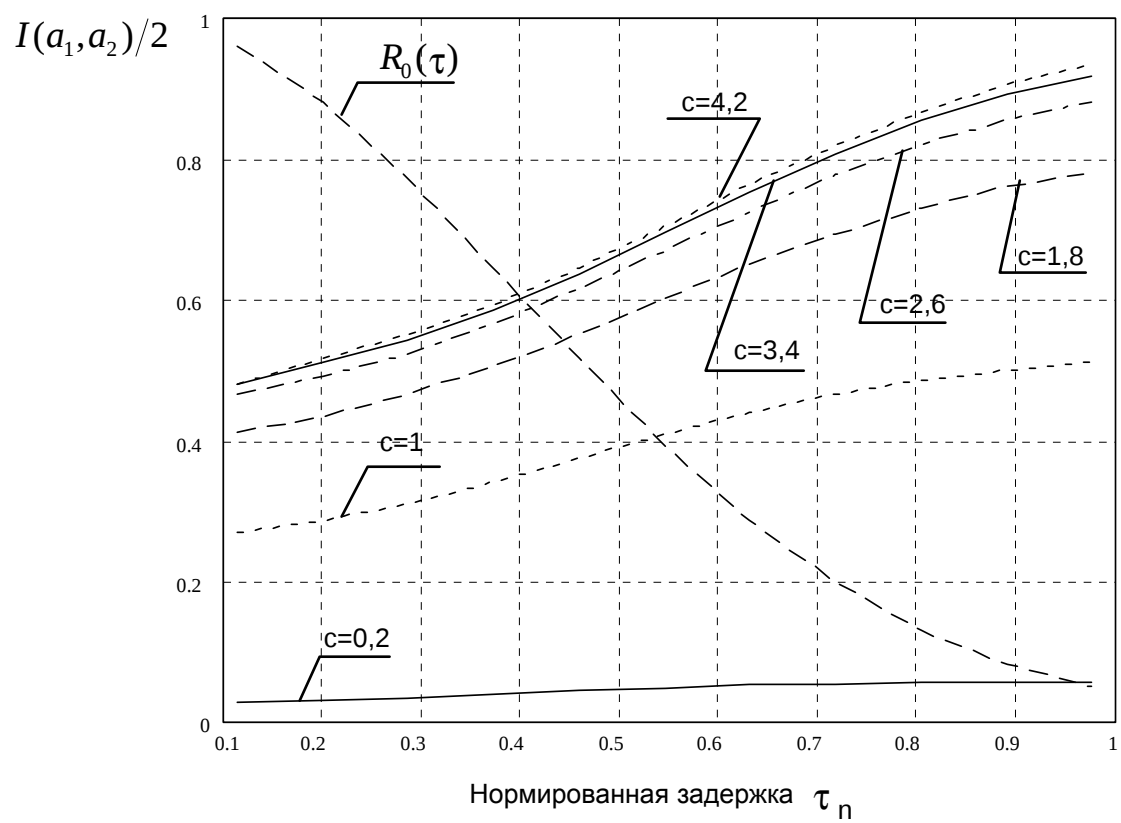
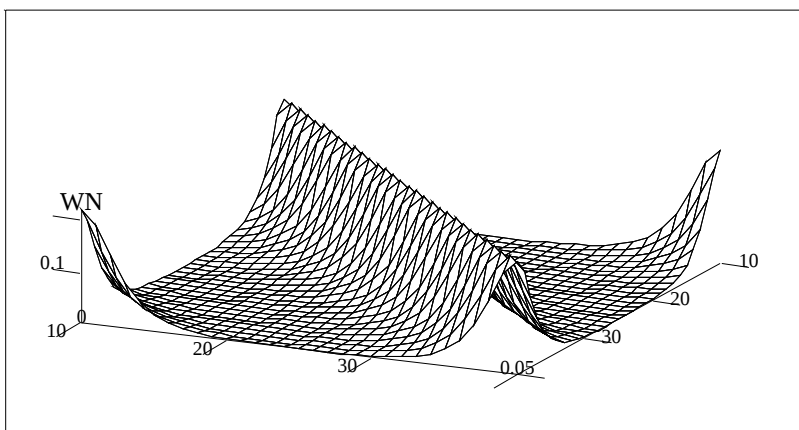
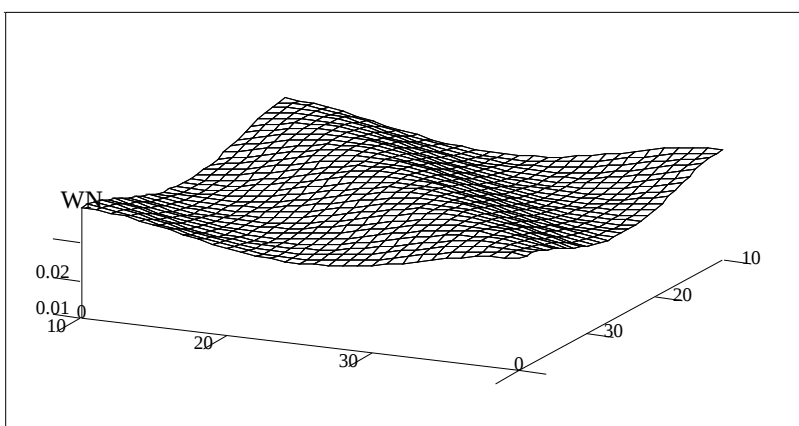


Рис. 2-10.



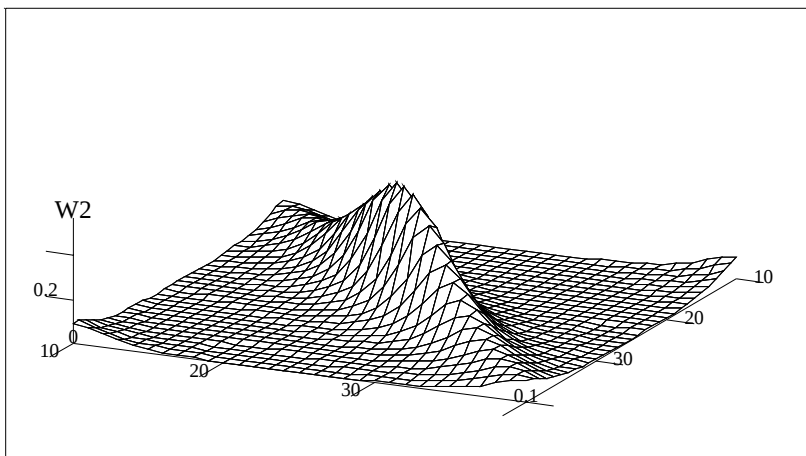
отношение сигнал/шум=0

коэффициент корреляции=0.8

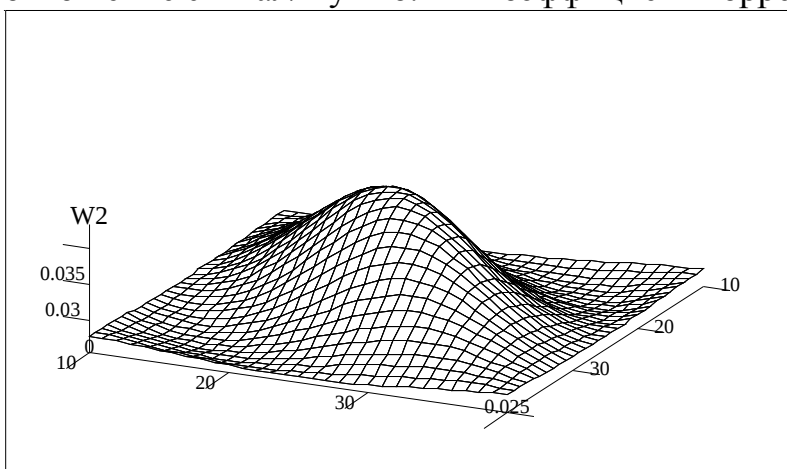


отношение сигнал/шум=0

коэффициент корреляции=0.1



отношение сигнал/шум=0.1 коэффициент корреляции=0.8



отношение сигнал/шум=0.1 коэффициент корреляции=0.1

2.2.3. Расчет информативности параметров сигнала с использованием статистического моделирования

Аналитически информационные характеристики могут быть получены только в тех случаях, когда ПРВ наблюдения $p(\vec{x} / \vec{\theta})$ во-первых, представлена аналитической функцией параметров сигнала и во-вторых аналитическое выражение для $p(\vec{x} / \vec{\theta})$ допускает получение аналитического выражения для ИМФ. Примером такой ситуации могут быть рассмотренные выше выражения (2-36) и (2-38) для количества информации по Фишеру об амплитуде детерминированного сигнала в огибающей и фазе.

При существенной сложности выражения для $p(\vec{x} / \vec{\theta})$ получение аналитического выражения для ИМФ невозможно и основным средством оценки информативности являются методы численного интегрирования и дифференцирования. Так, сложность распределений огибающей и фазы сигнала и гауссова шума в два момента времени (2-39) и (11) не позволяет получить аналитическое выражение для ИМФ, поэтому при анализе информативности были применены численные методы.

Наиболее сложной ситуацией при вычислении ИМФ является ситуация, при которой получение ПРВ $p(\vec{x} / \vec{\theta})$ возможно только путем лабораторного эксперимента или статистического моделирования. Можно привести две причины по которым мы прибегаем к моделированию:

- ПРВ $p(\vec{x} / \vec{\theta})$ определяется сложным и приближенным аналитическим выражением, мало пригодными для расчета информативности численными методами,
- аналитическое выражение для $p(\vec{x} / \vec{\theta})$ отсутствует.

Схема статистического моделирования для оценки информативности показана на рис. 2-11. Блок источника сигнала моделирует сигнал $s(t, \vec{\theta})$ с заданными статистическими свойствами вектора параметров $\vec{\theta}$. Блок источника шума моделирует шумовой процесс $n(t)$ в соответствии с заданными законом распределения и корреляционной функцией. Следующий блок моделирует канал распространения и в простейшем случае аддитивного взаимодействия сигнала и помехи представляет собой сумматор отсчетов сигнала и шума. Далее, образованные отсчеты входного случайного процесса $r(t)$ поступают на блок моделирования обработки сигналов в приемнике. На выходе приемника получаем ряд случайных процессов $x_i(t)$ ($i = \overline{1, k}$), информативность которых необходимо оценить. Случайные процессы $x_i(t)$ являются результатом преобразования входного случайного процесса $r(t)$ и в частности могут представлять собой процессы на выходе преобразователей, моделирующих различные детекторы (см. рис. 2-5).

Отсчеты процессов $x_i(t)$ поступают на блок оценки k -мерной ПРВ $p(x / \vec{\theta})$, а затем на блок вычисления ИМФ. Кроме того, в блок вычисления ИМФ поступают значения параметров сигнала $\vec{\theta}$, зафиксированные на время оценки $p(x / \vec{\theta})$.

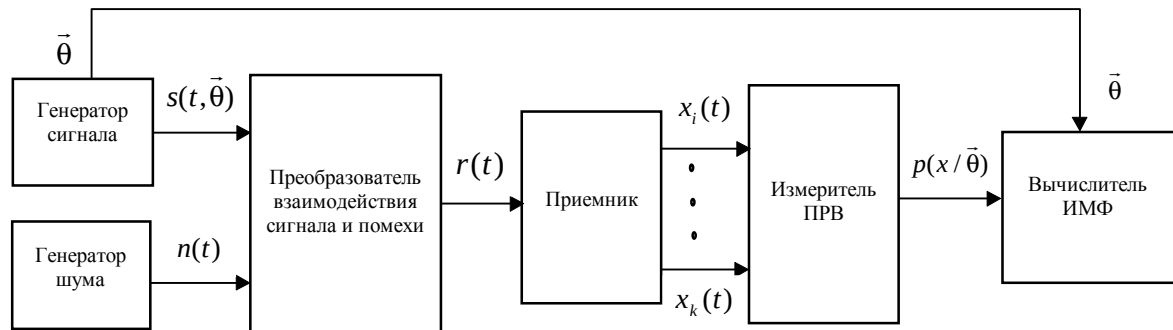


Рис. 2-11.

Применение метода статистического моделирования при оценке информативности исследуемым методом предполагает решение следующих задач:

- выбор оптимального шага по параметру дифференцирования.
- выбор метода оценки ПРВ (эффективность-время моделирования при фиксированной точности оценки ИМФ, противоречие между грубыми методами с большим количеством выборок и точными, но с малым количеством выборок)

Выбор оптимального шага по ВПС при численном дифференцировании.

При численном дифференцировании $p(\vec{x} / \vec{\theta})$ с постоянным шагом $\Delta\theta$ значения функции p делятся на $\Delta\theta$. Поэтому при уменьшении $\Delta\theta$ погрешности оценивания $p(\vec{x} / \vec{\theta})$ оказывают сильное влияние на результат численного дифференцирования. Таким образом возникает задача определения оптимального шага $\Delta\theta$, ибо погрешность собственно метода численного дифференцирования стремится к нулю при $\Delta\theta \rightarrow 0$, а погрешность, вызванная оценкой p растет.

Вычисление первой производной по параметру для гистограммной оценки ПРВ ВН проведем по разностной схеме с двумя узлами,:

Найдем оптимальное значение $\Delta\theta$ для центрально разностной производной:

Абсолютная погрешность

Волков Е. А. Численные методы. М., 1987.

2.2.4. Расчет информативности параметров сигнала с использованием экспериментальных измерений плотности распределения

Для исследуемого метода оценки информативности наиболее эффективным является оценка информативности параметров сигнала при экспериментальном измерении ПРВ помехи.

Представление информации по Фишеру при ее экспериментальном измерении.

При решении задачи оценки информативности параметров сигнала в задачах обнаружения и распознавания на фоне помех с произвольным распределением требуется определение статистических характеристик оценок параметров сигнала. В предположении несмещенности оценок основной статистической характеристикой оценки параметра является дисперсия оценки либо ее граничное значение, определяемое информационной матрицей Фишера.

Количество информации по Фишеру о параметре сигнала λ относительно вектора наблюдения $\vec{X}$ определяется как:

$$I_{\phi}(\lambda_i, \lambda_j) = m \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial \lambda_i} \ln w_{\lambda}(\vec{X}) \right] \left[\frac{\partial}{\partial \lambda_j} \ln w_{\lambda}(\vec{X}) \right] \right\} \quad (2-40)$$

На основе данного критерия разрабатывается методика оценки информативности параметров сигнала импульсной РЛС при воздействии активных помех. Сложность реализации этой методики с учетом располагаемой импульсной РЛС представляет получение логарифмической производной по параметру λ . При экспериментальном расчете выражение для количества информации по Фишеру может быть переведено в разностную форму. Например, при вычислении количества информации о параметрах $a = a_k$ и $\phi = \phi_l$, по двумерной гистограмме:

$$I(a_k, \phi_l) = \frac{1}{(a_k - a_{k-\Delta})(\phi_k - \phi_{k-\Delta})} \sum_{j=1}^J \sum_{m=1}^M \left(\frac{N_{jm}^{kl}}{N^{kl}} - \frac{N_{jm}^{k-\Delta, l}}{N^{k-\Delta, l}} \right) \left(\frac{N_{jm}^{kl}}{N^{kl}} - \frac{N_{jm}^{k, l-\Delta}}{N^{k, l-\Delta}} \right) \frac{N_{jm}^{kl}}{N_{jm}^{kl}}. \quad (2-41)$$

$I(a_k, \varphi_l)$ - информация Фишера о параметрах a и φ при фиксированных значениях $a = a_k, \varphi = \varphi_l$,

j, m - номера классов гистограммы по осям x_1 и x_2 ,

N_{jm}^{kl} - содержимое j, m -ячейки при $a = a_k, \varphi = \varphi_l$,

$N_{jm}^{k-\Delta, l}$ - содержимое j, m -ячейки при $a = a_{k-\Delta}, \varphi = \varphi_l$,

$N_{jm}^{k, l-\Delta}$ - содержимое j, m -ячейки при $a = a_k, \varphi = \varphi_{l-\Delta}$,

$$N^{kl} = \sum_{j=1}^J \sum_{m=1}^M N_{jm}^{kl}.$$

Алгоритм вычисления информации Фишера по разностной форме предполагает измерение плотности распределения $w_\lambda(\vec{X})$ на дискретной сетке параметра λ . Это в свою очередь предъявляет к используемой РЛС требование перестройки параметров зондирующего сигнала. Используемая УКВ РЛС, не имеет такой возможности по изменению параметров с необходимым шагом.

Вследствие этого возникает необходимость представления количества информации по Фишеру, позволяющее разделить измерение дезинформационного действия активной помехи и зависимости информации по Фишеру от зондирующего сигнала $s(t, \lambda)$ с фиксированными параметрами λ .

Допущения о сигнале и помехах.

Цифровая обработка сигналов предполагает дискретизацию во времени и квантование по уровню входных сигналов. Однако, если допустить, что число уровней квантования велико, то для теоретических исследований удобно полагать, что входной сигнал является дискретным во времени и непрерывным по уровню, а влияние квантования по уровню учитывается введением дополнительных «шумов квантования», которые добавляются к входной помехе. Поэтому в данной работе будем рассматривать дискретное представление сигналов и помех.

Предположим, что наблюдение $y(t)$ является аддитивной смесью сигнала $s(t, \lambda)$ и помехи $n(t)$:

$$y(t) = s(t, \lambda) + n(t),$$

При дискретном наблюдении непрерывных процессов информация о наблюдаемых данных будет заключена в случайных величинах:

$$\vec{y}_1 = \vec{y}(t_1), \quad \vec{y}_2 = \vec{y}(t_2), \quad \dots \quad \vec{y}_h = \vec{y}(t_h),$$

представляющих собой выборки колебания на интервале наблюдения T . Выборки берутся через одинаковый интервал времени: $T_0 = t_h - t_{h-1}$. Сигнал $s(t, \lambda)$ зависит от векторного параметра λ и также определяется совокупность отсчетов

$$s_1(\lambda) = s(t_1, \lambda), \quad s_2(\lambda) = s(t_2, \lambda), \quad \dots \quad s_h(\lambda) = s(t_h, \lambda),$$

Выражение для функции правдоподобия в данном случае можно записать как

$$w_\lambda(y) = w_\lambda(y_1, y_2, \dots, y_h) = w_n([y_1 - s_1(\lambda)], \dots, [y_h - s_h(\lambda)]) = w_n(n_1, n_2, \dots, n_h),$$

где $n_h = y_h - s_h(\lambda)$.

Случай независимых помех.

В случае независимых помех (выборки помехи n_h являются независимыми величинами) выражение для функции правдоподобия образует произведения одномерных плотностей

$$w_\lambda(y) = \prod_{h=1}^H w_n[y_h - s_h(\lambda)], \quad \text{где } H = T / T_0$$

Значение логарифмической производной с учетом выражения для функции правдоподобия

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \ln w_n(y) = \sum_{h=1}^H \frac{\partial}{\partial \lambda} \ln w_n[y_h - s_h(\lambda)] = \sum_{h=1}^H \frac{\partial}{\partial n} \ln w_n(n_h) \left[-\frac{\partial s_h(\lambda)}{\partial \lambda} \right]$$

Откуда имеем

$$I_\phi(\lambda) = m \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial n} \ln w_n(n) \right]^2 \sum_{h=1}^H \left[\frac{\partial s_h(\lambda)}{\partial \lambda} \right]^2 \right\} = I_{\phi.n1} \sum_{h=1}^H \left[\frac{\partial s_h(\lambda)}{\partial \lambda} \right]^2,$$

$$\text{где } I_{\phi.n1} = m \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial n} \ln w_n(n) \right]^2 \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial}{\partial n} \ln w_n(n) \right]^2 w_n(n) dn,$$

-количество информации по Фишеру о помехе с одномерным распределением $w_n(n)$.

Случай зависимых помех.

При зависимой помехе, задаваемой двумерной плотностью распределения вероятностей или плотностью вероятностей перехода $w_n(n_h / n_{h-1})$, функция правдоподобия и количество информации по Фишеру будут соответственно определяться выражениями:

$$w_\lambda(y) = \prod_{h=1}^H w_n[y_h - s_h(\lambda) / y_{h-1} - s_{h-1}(\lambda)],$$

$$I_\phi(\lambda) = I_{\phi.n.2} \sum_{h=1}^H \left[\frac{\partial s_h(\lambda)}{\partial \lambda} \right]^2,$$

где

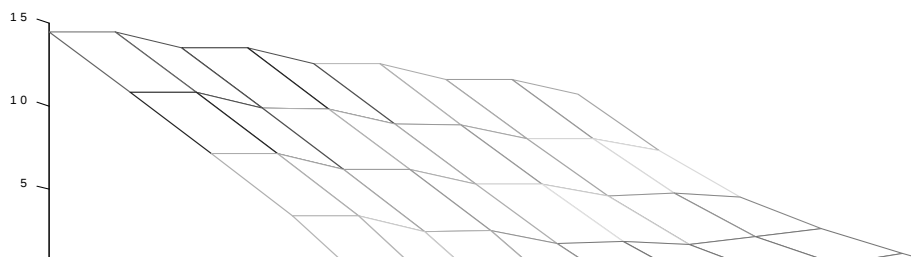
$$I_{\phi.n.2} = m \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial n_h} \ln w_n(n_h / n_{h-1}) \right]^2 \right\} = \iint_{N_w} \ln \left[\frac{\partial}{\partial n_h} \ln w_n(n_h / n_{h-1}) \right]^2 w_n(n_h; n_{h-1}) dn_n dn_{h-1},$$

представляет собой количество информации по Фишеру относительно помехи с условной плотностью распределения вероятностей $w_n(n_h / n_{h-1})$.

Выводы.

Использование представления для количества информации по Фишеру для независимой помехи и для зависимой помехи позволяет рассчитать количество информации по Фишеру при воздействии активных помех экспериментальным путем без изменения параметров зондирующего сигнала РЛС.

Количество информации по Фишеру о помехе



3. МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ ОЦЕНКИ МНОГОМЕРНОЙ ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

3.1. Методы и алгоритмы оценки многомерной ПРВ случайных процессов

3.2. Анализ погрешностей ПРВ методом гистограмм

При аппаратурном измерении плотности распределения вероятностей (ПРВ) по отрезкам реализаций случайных процессов случайная выборка не всегда может быть практически осуществимой. Обычно мы имеем дело с обработкой случайного процесса в виде ряда выборочных значений, представляющих собой чаще всего периодическую последовательность дискретных значений. Близкоотстоящие выборочные значения коррелированы, поэтому оценка точности измерения ПРВ оказывается намного сложнее при анализе случайных процессов, чем при анализе случайных выборок в классической статистической теории. Более того, вопрос о погрешностях измерения ПРВ случайных процессов в общем виде оказывается настолько сложным, что удовлетворительное его решение получено пока только для одномерных ПРВ эргодических случайных процессов. Так уже при нахождении дисперсии оценки двумерной ПРВ трудно аналитически определить корреляционные функции вспомогательного процесса после нелинейного преобразования. Для таких расчетов приходится использовать моделирование при помощи ЭВМ.

3.2.1. Основные виды погрешностей измерения плотности распределения вероятностей эргодических случайных процессов и способы их определения.

Экспериментальное определение ПРВ мгновенных значений случайных процессов неизбежно сопровождается двумя основными типами погрешностей:

1. Погрешности метода измерений (методические погрешности). Для выбранного метода оценки ПРВ (путем измерения относительного времени пребывания в пределах заданного уровня) методические погрешности обусловлены следующими факторами:
 - а) конечной длительностью времени наблюдения T (конечным числом анализируемых временных выборок).
 - б) конечным числом уровней квантования исследуемого случайного процесса (уровней анализа).

в) погрешностями, возникающими при обработке результатов измерений - выравнивании статистических рядов, сглаживании гистограмм и т.п.

2. Аппаратурные погрешности, присущие любому статистическому анализатору как измерительному прибору. Источники аппаратурных (инструментальных) ошибок весьма многочисленны. Однако при цифровой реализации аппаратуры основным источником погрешностей этого типа является аналого-цифровое преобразование исследуемой реализации. В ряде случаев погрешности могут возникать из-за недостаточной широкополосности входных устройств, усилителей и т.п.

Погрешности первой группы определяют предельную достижимую точность выбранного метода измерения и представления данных поступающих на вход статистического анализатора; погрешности второй группы определяют его класс точности как измерительного прибора.

Существенный интерес представляет анализ погрешностей именно первой группы. Поскольку при проектировании анализатора ПРВ заданная допустимая погрешность измерения ограничивает в первую очередь ожидаемую методическую погрешность, а основные технические параметры анализатора (время анализа и число уровней квантования) выбираются исходя из ограниченной методической погрешности. Допустимые аппаратурные погрешности выбирают гораздо меньше ожидаемой методической погрешности.



Рис. 3-1.

По характеру проявления различают систематическую и случайную (статистическую) погрешности измерения статистических характеристик.

Систематическую и случайную составляющую имеют как методические, так и аппаратные погрешности. Классификация ошибок оценки ПРВ по приведенным выше признакам с указанием вызывающих их причин представлена на рис. 3-1.

Случайные погрешности. Случайные погрешности вызваны:

1). Конечным объемом выборки (теоретически для определения характеристик стационарного эргодического процесса по одной его реализации необходимо вести измерение в течении бесконечного интервала времени).

Однако не всегда увеличение времени наблюдения повышает точность измерения. Дело в том, что практически часто исследуются квазистационарные процессы, о характеристиках которых судят по усеченным реализациям, и поэтому при чрезмерном увеличении длительности реализации может оказаться несправедливым предположение о стационарности процесса. При исследовании характеристик по ансамблю реализаций исследуется конечное число реализаций процесса. Кроме того погрешности возникают из-за неточного совмещения начальных точек реализаций.

2) Способом выборки (периодическая - непериодическая, коррелированная - некоррелированная).

3) Абсолютным значением ПРВ на анализируемом интервале.

В статистическом анализе существует два подхода к оценке случайной погрешности: либо по вероятности (вычисление доверительных интервалов)

$$P[|w^*(x, \Delta x, T) - w(x)| > \gamma(x)] < \beta(x),$$

либо по величине ожидаемой дисперсии

$$\sigma_w^2(x, \Delta x, T) = \overline{[w^*(x, \Delta x, T) - w(x)]^2},$$

либо по величине относительной среднеквадратической ошибки

$$\delta_w(x, \Delta x, T) = \frac{\sigma_w^2(x, \Delta x, T)}{w(x)}.$$

Важно подчеркнуть, что при измерении вероятностных характеристик случайного процесса для суждения о точности измерений всегда необходимо больше информации, чем может дать данное измерение. При определении среднего необходимо знать дисперсию, если определяются одномерные законы распределения, то требуется знание двумерных законов и т.д. В реальных условиях часто такая информация отсутствует. Поэтому рационален такой путь вычисления ожидаемых статистических погрешностей: сначала получают общие выражения зависимости между

дисперсией оценки, временем анализа и вероятностными характеристиками процесса; затем задаются конкретным видом вероятностной характеристики (строят модель) и получают выражение, связывающее продолжительность анализа с ожидаемой погрешностью для характеристики данного вида.

Систематические погрешности. Подобные погрешности при оценке ПРВ, как и при оценке плотности любой другой величины происходят из-за вычисления плотности для определенного конечного интервала. Систематические погрешности характеризуются величиной смещения для данного аргумента ПРВ.

3.2.2. Основные закономерности оценки плотности распределения вероятностей.

Экспериментальное определение ПРВ $w(x)$ наиболее просто осуществляется для эргодических случайных процессов и основывается на анализе реализации случайного процесса соответствующей длительности T .

Одномерная ПРВ эргодического случайного процесса $x(t)$ определяется на основе соотношения [13]

$$w(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \frac{P[(x - dx/2) \leq x(t) \leq (x + dx/2)]}{dx} = \lim_{T \rightarrow \infty; \Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{T\Delta x} \sum_{i=1}^n \tau_i, \quad (3-1)$$

которое равно отношению вероятности события, что значения случайного процесса $x(t)$ лежит в интервале $[x - dx/2; x + dx/2]$, к длине этого интервала, а поскольку для рассматриваемого класса случайных процессов возможно усреднение по времени, то пределу отношения суммарного времени пребывания $\sum \tau_i$ случайного процесса в указанном интервале в течении времени T к произведению времени наблюдения T и интервала Δx .

В реальных условиях измерение ПРВ происходит за фиксированное время анализа T , а интервал Δx имеет конечное значение (рис. 3-2а).

Поэтому экспериментально полученные значения ПРВ (оценки ПРВ $w^*(x)$)

$$w^*(x) = \frac{1}{T\Delta x} \sum_{i=1}^n \tau_i \quad (3-2)$$

будет отличаться от истинного значения ПРВ $w(x)$ на случайную величину

$$\Delta w(x) = w(x) - w^*(x) \quad (3-3)$$

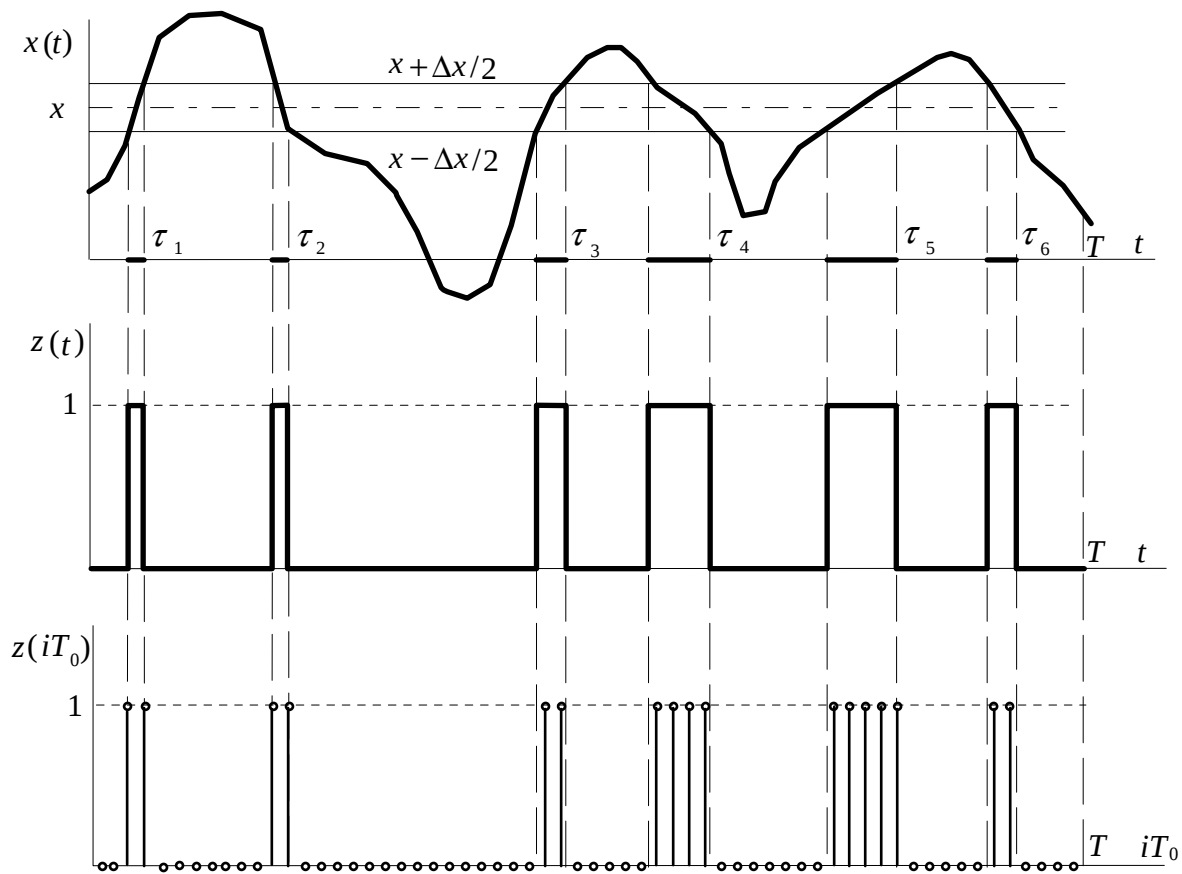


Рис. 3-2

При этом смещение и дисперсия оценки определяются выражениями:

$$b[w^*(x)] = w(x) - \langle w^*(x) \rangle, \quad (3-4)$$

$$D[w^*(x)] = \langle [w^*(x) - \langle w^*(x) \rangle]^2 \rangle. \quad (3-5)$$

Согласно выражению (3-1) ПРВ экспериментально определяется как среднее значение плотности на интервале Δx . Поэтому с точки зрения приближения ПРВ к ее действительному значению на уровне x желательно интервал Δx уменьшать. Однако уменьшение Δx при фиксированном времени анализа T , приводит к уменьшению времени пребывания случайного процесса в этом интервале и, следовательно, к увеличению дисперсии оценки ПРВ за счет уменьшения статистических данных, на основе которых выносятся решения о значении ПРВ. Поэтому существует определенное оптимальное значение Δx , при котором рассеяние оценки ПРВ

$$\hat{D}[w^*(x)] = b^2[w^*(x)] + D[w^*(x)] \quad (3-6)$$

принимает минимальное значение при фиксированном времени наблюдения T .

Существует несколько способов измерения суммарного времени пребывания реализации случайного процесса в пределах заданного уровня.

Первый способ (непрерывный) - это прямое измерение суммарного времени пребывания. Для этого реализация $x(t)$ преобразуется в последовательность прямоугольных импульсов $z(t)$ (рис. 3-2б) единичной амплитуды и длительности τ_i , равной времени пребывания реализации в пределах интервала. Это нелинейное безынерционное преобразование записывается следующим образом:

$$z(t) = \begin{cases} 1 - \text{при } x - \Delta x / 2 \leq x(t) \leq x + \Delta x / 2, \\ 0 - \text{при } x(t) < x - \Delta x / 2, x(t) > x + \Delta x / 2. \end{cases} \quad (3-7)$$

Тогда площадь, занимаемая всеми прямоугольными импульсами численно равна суммарному времени пребывания:

$$\sum_{i=1}^n \tau_i = \int_0^T z(t) dt. \quad (3-8)$$

В результате выражение для оценки ПРВ принимает вид:

$$w^*(x) = \frac{1}{T\Delta x} \int_0^T z(t) dt. \quad (3-9)$$

Функциональная схема подобного измерителя показана на рис. Рис. 3-За.

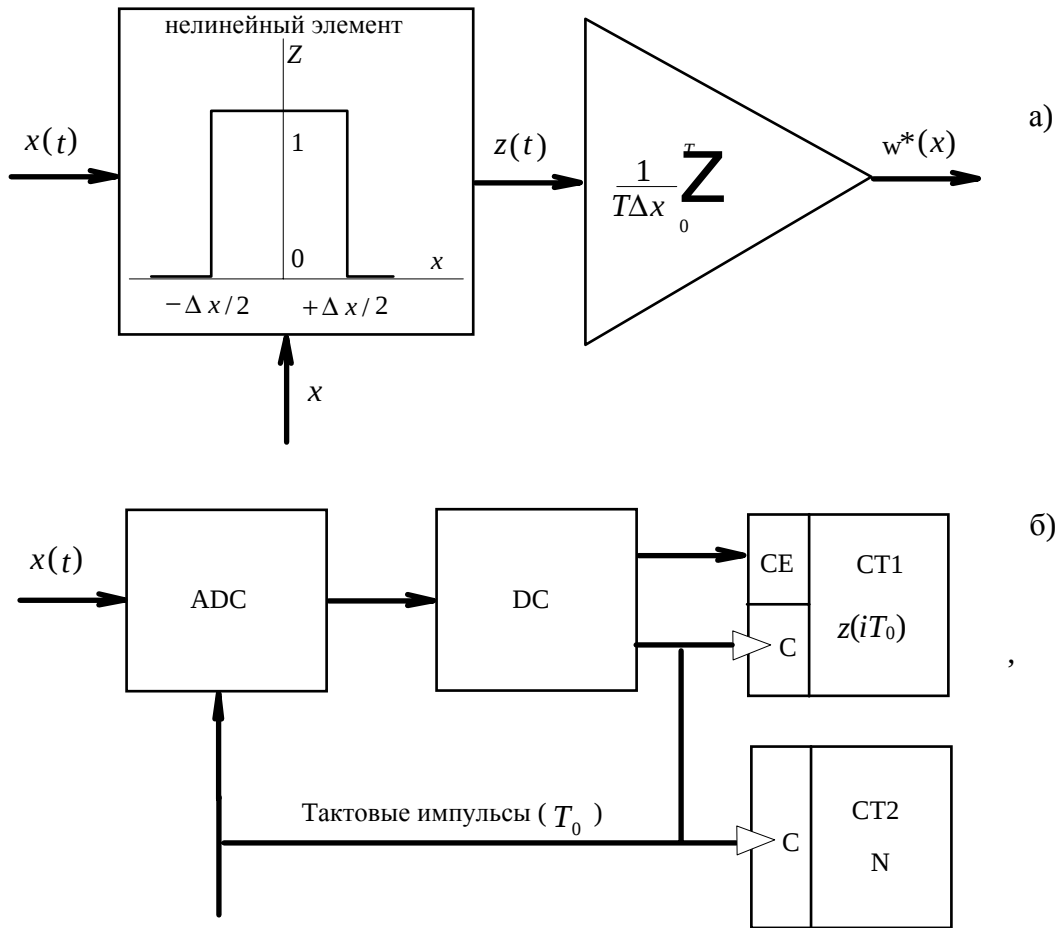


Рис. 3-3

Второй способ (дискретных выборок) основан на счете числа импульсов. Для этого непрерывная реализация случайного процесса сначала преобразуется в дискретную последовательность $x(iT_0)$, а затем подлежит нелинейному преобразованию (рис. 3-2в)

$$z(iT_0) = \begin{cases} 1 - \text{при } x - \Delta x / 2 \leq x(iT_0) \leq x + \Delta x / 2, \\ 0 - \text{при } x(iT_0) < x - \Delta x / 2, x(iT_0) > x + \Delta x / 2. \end{cases} \quad (3-10)$$

Тогда число импульсов после преобразования будет равно времени пребывания в заданном интервале

$$\sum_{i=1}^n \tau_i = \sum_i z(iT_0), \quad (3-11)$$

а определение ПРВ сводится к следующей процедуре:

$$w^*(x) = \frac{1}{N\Delta x} \sum_{i=1}^n z(iT_0), \quad (3-12)$$

где N – общее число выборок для анализа. Функционально эта операция представлена на рис. Рис. 3-3б, где в качестве нелинейного преобразователя и устройства дискретизации показан АЦП с дешифратором кода соответствующего уровня $x \pm \Delta x / 2$. Счетчик СТ1 подсчитывает единичные импульсы $z(iT_0)$, а СТ2 общее число импульсов анализа N .

3.2.3. Характеристики оценки ПРВ случайного процесса.

Вычислим смещение и дисперсию оценки ПРВ эргодического случайного процесса на основе анализа в течении времени T непрерывной реализации в соответствии с выражением (2-9).

Смещение оценки.

Смещение оценки определяется выражением:

$$b[w^*(x)] = w(x) - \langle w^*(x) \rangle. \quad (3-13)$$

Поскольку оценка $w^*(x)$ получается усреднением по времени

$$b[w^*(x)] = \frac{1}{T\Delta x} \int_0^T \langle z(t) \rangle dt - w(x). \quad (3-14)$$

В свою очередь среднее значение $z(t)$ по реализациям представляет собой вероятность того, что анализируемый случайный процесс лежит в интервале значений $x \pm \Delta x / 2$ т.е.

$$\langle z(t) \rangle = \int_{x-\Delta x/2}^{x+\Delta x/2} w(x) dx = F(x + \Delta x/2) - F(x - \Delta x/2). \quad (3-15)$$

Отсюда (3-14) запишется:

$$b[w^*(x)] = \frac{1}{\Delta x} \left[F(x + \Delta x/2) - F(x - \Delta x/2) \right] - w(x). \quad (3-16)$$

Разложим функцию $F(x + \Delta x/2)$ и $F(x - \Delta x/2)$ в ряды Тейлора в окрестности точки x :

$$F(x + \Delta x / 2) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{d^{\mu} F(x)}{dx^{\mu}} \frac{1}{\mu!} \left(\frac{\Delta x}{2} \right)^{\mu},$$

$$F(x - \Delta x / 2) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{d^{\mu} F(x)}{dx^{\mu}} \frac{(-1)^{\mu}}{\mu!} \left(\frac{\Delta x}{2} \right)^{\mu}.$$

Тогда формулу для смещения оценки ПРВ можно преобразовать к виду

$$b[w^*(x)] = \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{d^{2\mu+1} F(x)}{dx^{2\mu+1}} \frac{(\Delta x / 2)^{2\mu}}{(2\mu + 1)!}. \quad (3-17)$$

Для практических приложений часто достаточно ограничиться первыми двумя членами ряда

$$b[w^*(x)] = \frac{\Delta x^2}{24} \frac{d^2 w(x)}{dx^2} + \frac{\Delta x^4}{1920} \frac{d^4 w(x)}{dx^4}. \quad (3-18)$$

В пределе при $\Delta x \rightarrow 0$ смещение оценки стремиться к нулю, т.е. при $\Delta x \rightarrow 0$ оценка ПРВ асимптотически является несмещенной. Действительно, при $\Delta x \rightarrow 0$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x / 2) - F(x - \Delta x / 2)}{\Delta x} - w(x) = \frac{dF(x)}{dx} - w(x) = 0.$$

Конкретизируем формулу (3-17) применительно к гауссовскому и релеевскому случайным процессам. Так как

$$\frac{d^v \Phi(x / \sqrt{D_0})}{dx^v} = \Phi^{(v)}(z) D_0^{-v/2},$$

где $z = x / \sqrt{D_0}$, выражение для смещения оценки ПРВ гауссовского случайного процесса принимает вид

$$b[w^*(x)] = D_0^{-1/2} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{(\Delta x / 2 \sqrt{D_0})^{2v}}{(2v + 1)!} \Phi^{(2v+1)}\left(\frac{x}{\sqrt{D_0}}\right) \approx$$

$$\approx \left\{ \frac{(\Delta x / \sqrt{D_0})^2}{24} \Phi^{(3)}\left(\frac{x}{\sqrt{D_0}}\right) + \frac{(\Delta x / \sqrt{D_0})^4}{1920} \Phi^{(5)}\left(\frac{x}{\sqrt{D_0}}\right) \right\} D_0^{-1/2}. \quad (3-19)$$

При этом минимальное смещение оценки для $(x / \sqrt{D_0}) < 1$ соответствует значению $z \approx 1$, при котором $\Phi^{(3)}(z) \approx 0$.

Применительно к релеевскому случайному процессу смещение оценки ПРВ в первом приближении (первое слагаемое в (3-18)) определяется выражением

$$b[w^*(x)] \approx \frac{(\Delta x / \sqrt{D_0})^2}{24\sqrt{D_0}} \left(\frac{x^2}{D_0} - 3 \right) \left(\frac{x}{\sqrt{D_0}} \right) \exp\left(-\frac{x^2}{2D_0} \right). \quad (3-20)$$

На рис. 3-4 приведены зависимости относительного смещения $|b[w^*(x)]/w(x)|$ оценки ПРВ гауссовского процесса (сплошные линии) и релеевского процесса (штриховые линии) от нормированного интервала $\Delta z = \Delta x / \sqrt{D_0}$ и различных значений нормированного уровня z . Из этих кривых видно, что относительные смещения оценки ПРВ для $\Delta z \leq 0,5$ не превосходят 0,03, что вполне допустимо для практических приложений.

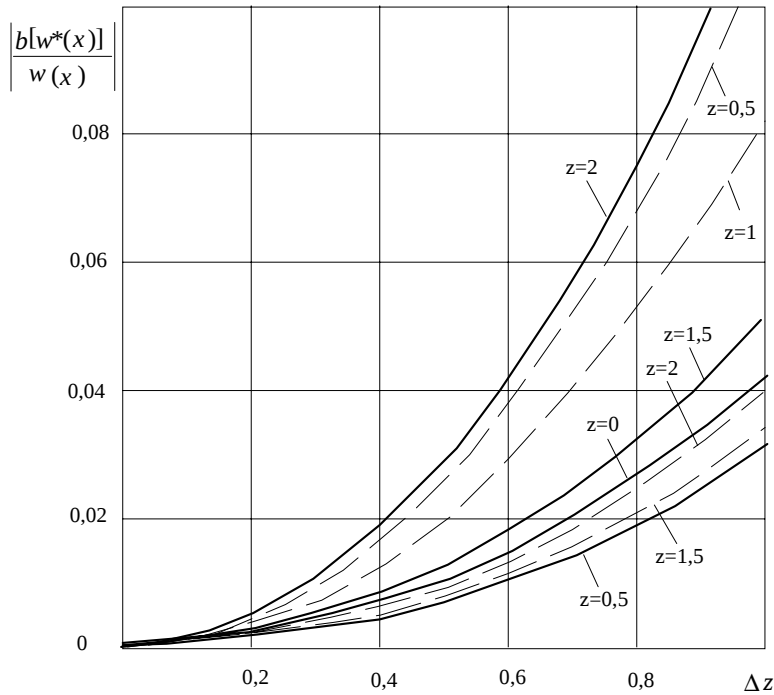


Рис. 3-4

Дисперсия оценки [14].

Вычислим дисперсию оценки ПРВ случайного процесса. Обозначим

$$P[x \leq X(iT_0) \leq x + \Delta x] = M[z(iT_0)] = m_z. \quad (3-21)$$

При условии, что коридор Δx весьма мал, с точностью до бесконечно малых второго порядка справедливо равенство

$$m_z = w(x)\Delta x \quad (3-22)$$

Из выражения (3-22) следует, что

$$\delta_w^2 = \frac{D[w^*(x)]}{w^2(x)} = \frac{D[m_z^*]}{m_z^2} = \delta_{m_z}^2. \quad (3-23)$$

Относительная среднеквадратическая погрешность измерения среднего значения некоррелированными выборками определяется как [14]

$$\delta_{m_x}^2_{н.к.} = \frac{1}{N} \frac{D_x}{m_x^2} = \frac{1}{N} \chi_x^2, \quad (3-24)$$

где χ_x -коэффициент изменчивости случайного процесса $x(t)$.
Следовательно

$$\delta_{m_z}^2_{н.к.} = \frac{1}{N} \chi_z^2. \quad (3-25)$$

Определим коэффициент изменчивости случайного процесса $x(t)$. По определению

$$\sigma_z^2 = M[z^2(t)] - m_z^2.$$

Поскольку функция $z(t)$ принимает только значения 1 или 0, то

$$z^2(t) = z(t) \quad \text{и} \quad M[z^2(t)] = m_z.$$

С учетом соотношения (3-22) имеем:

$$\sigma_z^2 = \Delta x w(x) - (\Delta x w(x))^2 = \Delta x w(x)(1 - \Delta x w(x)) \quad (3-26)$$

$$\chi_z^2 = \frac{\sigma_z^2}{m_z^2} = \frac{1 - \Delta x w(x)}{\Delta x w(x)} \quad (3-27)$$

Подстановка значения коэффициента изменчивости из (3-27) дает

$$\delta_w^2_{н.к.} = \frac{1}{N} \frac{1 - \Delta x w(x)}{\Delta x w(x)}. \quad (3-28)$$

или

$$\delta_w^2_{н.к.} = \frac{1}{N} \frac{\frac{1}{\Delta x} - w(x)}{w(x)}. \quad (3-29)$$

При малой вероятности попадания выборки в дифференциальный коридор, т.е. когда $w(x) \ll 1/\Delta x$,

$$\delta_{w \text{ н.к.}}^2 \approx \frac{1}{Nw(x)\Delta x}. \quad (3-30)$$

Отсюда требуемое число некоррелированных выборок

$$N \approx \frac{1}{\delta_{\text{доп.}}^2 w(x)\Delta x}. \quad (3-31)$$

где $\delta_{\text{доп.}}^2$ - допустимая статистическая погрешность измерения. Соответственно продолжительность анализа на данном уровне

$$T = NT_0 \approx \frac{T_0}{\delta_{\text{доп.}}^2 w(x)\Delta x}. \quad (3-32)$$

Устанавливая интервалы выборок, существенно учитывать, что для анализа распределения вероятностей некоррелированными выборками с точностью характеризуемой формулой (3-29), достаточно иметь интервал $T_0 = \tau_{\text{м.к.}}$, т.к. уже при этом условии выборки практически некоррелированы. Дальнейшее увеличение интервала T_0 точности существенно не повышает. В тоже время при проектировании аппаратуры, анализирующей законы распределения высокочастотных процессов, существенно то обстоятельство, что выбор интервала опроса $T_0 > \tau_{\text{м.к.}}$ не понижает точности измерений. Ограничение накладывается лишь допустимым или практически приемлемым временем анализа.

3.3. Выбор параметров преобразования сигналов для оценки ПРВ методом гистограмм

Информационные характеристики сигналов и их параметров такие как: одномерная, двумерная и условная энтропия, коэффициент качества шума, информационная матрица Фишера и др. являются интегральными показателями многомерной условной плотности распределения вероятностей. Перечисленные выше информационные характеристики подверглись детальному изучению, для них получены аналитические выражения в предположении нормального или производных от него законов распределения сигнала или его параметров.

Однако, во многих практических случаях исследуемые радиосигналы обладают вероятностными свойствами отличными от нормальных, что

требует непараметрической оценки информационных характеристик. Для такого рода оценок может быть использован метод подстановки эмпирического распределения. Метод подстановки предписывает в качестве оценки информационной характеристики θ^* взять функцию

$$\theta^* = G[w^*(x)],$$

где функционал G определяет какую-либо информационную характеристику, а $w^*(x)$ - эмпирическая плотность вероятностей.

Точность оценки информационных характеристик будет определяться выбором параметров преобразования исследуемого сигнала для избранного метода непараметрической оценки плотности распределения вероятностей $w^*(x)$.

Ниже рассматривается выбор параметров преобразования радиосигнала для оценки ПРВ методом построения гистограммы. Привлекательными особенностями этого метода являются: простота вычислительных алгоритмов, большая, по сравнению с другими методами оценок непараметричность, малые аппаратные затраты при практической реализации.

3.3.1. Определение числа уровней квантования

Обзор подходов к выбору числа уровней квантования.

При построении гистограммы наблюдаемого эргодического случайного процесса важно рационально выбрать число уровней квантования по амплитуде, или что то же самое ширину дифференциального коридора. Этот вопрос затрагивается во многих работах по математической статистике при нахождении оптимального числа интервалов группирования экспериментальных данных.

Так А. Хальд в своей работе [15], показывает, что существует оптимальное число интервалов группирования, когда ступенчатая огибающая гистограммы наиболее близка к плавной кривой распределения генеральной совокупности. Можно сформулировать ряд аналитических критериев такой близости. Однако сам факт существования оптимума не зависит от выбора критерия близости, так как при группировании данных в слишком большое число мелких интервалов некоторые из них окажутся пустыми или мало заполненными. Гистограмма будет отличаться всплесками и провалами. При слишком малом числе интервалов гистограмма будет отличаться от действительной кривой распределения вследствие слишком крупной ступенчатости, из-за чего характерные особенности будут потеряны. Одним из практических признаков приближения к оптимуму может служить исчезновение в гистограмме провалов и близким к оптимальному может считаться наибольшее число интервалов, при котором гистограмма еще сохраняет плавный характер.

Иногда, это требование выражают по другому, рекомендуя, чтобы столбцы имели такую ширину, при котором в наименьшем столбце гистограммы содержалось бы не менее 10 наблюдений.

В литературе по статистической обработке экспериментальных данных приводятся и более конкретные рекомендации относительно выбора числа интервалов группирования, которые, однако, существенно различаются между собой. Эти рекомендации можно разделить на две группы: рекомендации, приводимые без использования каких-либо формальных критериев и рекомендации, полученные на основе использования различных критериев близости.

К первой группе рекомендаций следует отнести рекомендации, приводимые в большинстве пособий по математической статистике. Во многих, как классических, так и изданных в последние годы [16], руководствах по статистике для определения оптимального числа интервалов рекомендуется формула Старджеса:

$$n = \log_2 N + 1 = 3,3 \lg N + 1. \quad (3-33)$$

где n - оптимальное число интервалов группирования, N - число наблюдений.

Р. Шторм [17] и другие авторы рекомендуют формулу Брукса и Каррузера в виде:

$$n = 5 \lg N. \quad (3-34)$$

И. Хайнольд и К. Гаеде [18] рекомендуется для этой же цели соотношение

$$n = \sqrt{N}. \quad (3-35)$$

При этом следует отметить, что посылки, на основании которых получены эти рекомендации, не сообщаются. А в [18] отмечается, что Старджес выдвигал эвристическое предположение: поскольку свойством (3-33) обладает число n биномиальных коэффициентов, в то время как их сумма равна N , то вариационный ряд из N наблюдений удобно разбить на n интервалов.

Ко второй группе рекомендаций относятся исследования по использованию критерия χ^2 . Этот критерий требует разбиения выборки на интервалы с равной вероятностью. Поэтому, применение критерия χ^2 для интервалов постоянной длины, используемых обычно для построения гистограммы случайного процесса с помощью цифровой техники, неэффективно. Необходимо отметить, что число интервалов равной

вероятности и интервалов одинаковой длины различается в большое число раз.

Г. Манном и А. Вальдом [18] было установлено, что при $N \rightarrow \infty$, оптимальное число K , равновероятных интервалов при использовании χ^2 , имеет порядок

$$K \approx 4\sqrt[5]{2} (N/t)^{0,4}, \quad (3-36)$$

где t - безразмерная квантиль нормального распределения, соответствующая заданной вероятности $P = 1 - q$, а q - принятый уровень значимости. Если в (3-36) принять $t = 1,65$, что соответствует $P = 0,9$, то оно получит вид

$$K = 1,9 N^{0,4}. \quad (3-37)$$

К этой же группе рекомендаций относятся работы, основанные на использовании критерия близости в виде энтропийного коэффициента k_s . Понятие энтропийного коэффициента, как числовой характеристики формы распределения предложено в работе [19]. Исследования состояли в генерировании выборок разного объема из одной и той же генеральной совокупности. Для объединенной выборки с самым большим объемом наблюдений изменение числа интервалов не меняет общего вида гистограммы и оценка энтропийного коэффициента имеет небольшой разброс. Эта оценка и принималась за значение энтропийного коэффициента "генеральной совокупности". Затем определялись оценки k_s для малых выборок при разных значениях n . При некотором промежуточном n , оценка k_s равна найденной для "генеральной совокупности" и это значение n , принимается за оптимальное. Подобная процедура повторяется для различных распределений.

В работе И. У. Алексеевой (20) на основе экспериментальных статистик с помощью данного метода получено соотношение

$$n = \frac{4}{k} \lg \frac{N}{10}, \quad (3-38)$$

где k - оценка контрэксцесса. Это соотношение, в отличие от всех предыдущих, показывает, что оптимальное число интервалов квантования n существенно зависит от вида распределения (значения контрэксцесса k).

В [18] эти же экспериментальные данные аппроксимируются зависимостью вида $n = A(\epsilon) N^\alpha$, где ϵ - оценка эксцесса, α - показатель степени при объеме выборки N . Это приводит к соотношениям для расчета оптимального n :

$$n = \frac{\varepsilon + 1,5}{6} N^{0,4}. \quad (3-39)$$

Отмечается, что трудность практического применения (3-39) состоит в том, что число интервалов группирования необходимо выбрать прежде, чем будут найдены оценки σ, μ^4 и ε . Обойти эту трудность предлагается путем подстановки в (3-39) максимального и минимального значений эксцесса и контрэксцесса (от равномерного до распределения Лапласа) и искомое значение n может быть выбрано близким к середине между граничными значениями $n_{\min}$ и $n_{\max}$.

По виду зависимости от числа выборок N , приведенные выше рекомендации для определения количества интервалов квантования можно разделить на две группы:

1) с показателем степени числа N равным 0,4 или 0,5 и 2) с логарифмической зависимостью. На рис. 3-5 эти группы рекомендаций представлены областями на плоскости $n = f(N)$, ограниченными кривыми для трех плотностей вероятностей (нормальной, релеевской и экспоненциальной). Область 1 соответствует первой группе рекомендаций, 2 - второй.

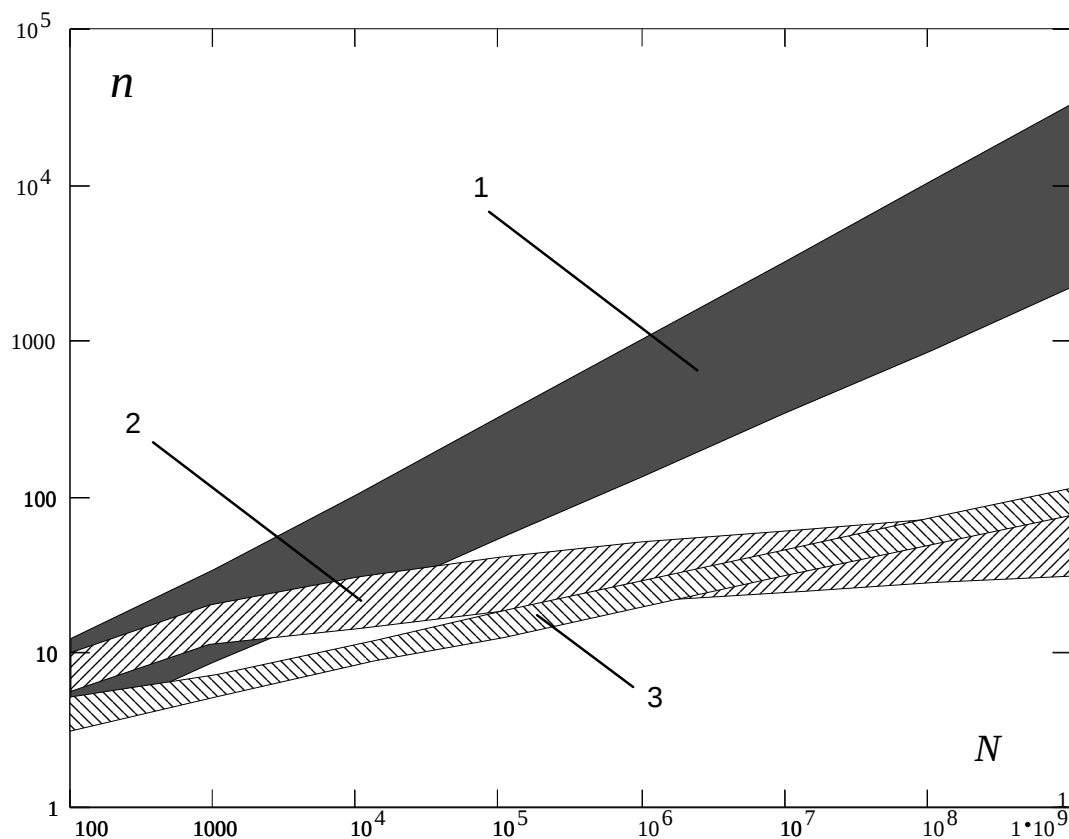


Рис. 3-5

Метод выбора числа уровней квантования на основе анализа ошибок оценки ПРВ.

Задача, аналогичная с задачей выбора оптимального числа уровней квантования, решается при оценке ПРВ методом относительного времени пребывания с помощью дискретных выборок [14, 21, 22]. В известной литературе, посвященной этому вопросу [14, 21] авторы решают вопрос рационального выбора ширины дифференциального коридора (ширины одного интервала группирования для определенного значения анализируемого процесса), поскольку от этого зависит точность измерений и продолжительность анализа.

Когда ширина Δx дифференциального коридора выбрана, число n интервалов группирования (уровней анализа) устанавливают из соотношения

$$n = E\left(\frac{x_{\max} - x_{\min}}{\Delta x}\right) + 1, \quad (3-40)$$

где E - целая часть дроби; $x_{\max} - x_{\min}$ - разность пиковых значений исследуемой реализации; Δx - ширина дифференциального коридора. Если выразить разность $x_{\max} - x_{\min}$ через среднеквадратическое отклонение σ_x и коэффициент пиковости k_p , то (3-40) можно записать так

$$n = E\left(\frac{k_p \sigma_x}{\Delta x}\right) + 1 = E\left(\frac{k_p}{\Delta z}\right) + 1, \quad (3-41)$$

где $\Delta z = \frac{\Delta x}{\sigma_x}$ - нормированная ширина коридора.

Ширину дифференциального коридора целесообразно выбирать, учитывая два вида относительных погрешностей измерений: систематическую и случайную. Первая погрешность-это относительная величина смещения оценки, а вторая-корень квадратный из относительной дисперсии оценки ПРВ $w(x)$. Смещение оценки обусловлено конечной шириной дифференциального коридора, а дисперсия - конечным числом отсчетов.

Выражения для расчета составляющих погрешности для некоррелированных выборок имеют вид [14]

$$\gamma(z) \approx \frac{(\Delta z)^2}{24} \frac{w''(z)}{w(z)}, \quad (3-42)$$

$$\gamma(z) \approx \frac{(\Delta z)^2}{24} \frac{w''(z)}{w(z)}, \quad (3-43)$$

Поскольку зависимости погрешностей γ и δ от ширины коридора Δz взаимно противоположны, то возможно отыскание оптимальной (в смысле минимума суммарной среднеквадратической погрешности $\zeta(z)$) ширины коридора Δz для определенного нормированного уровня анализа z :

$$\zeta(z) \approx \gamma^2(z) + \delta^2(z) \approx \frac{(\Delta z)^4}{576} \left[\frac{w''(z)}{w(z)} \right]^2 + \frac{1}{N \Delta z w(z)}, \quad (3-44)$$

$$\Delta z_{opt}(z) \approx \sqrt[5]{\frac{144 w(z)}{N (w''(z))^2}} \quad (3-45)$$

Тогда, используя (3-41) число интервалов квантования

$$n(z, \Delta z_{opt}(z)) = E \left(k_p \sqrt[5]{\frac{w''(z)^2}{144 w(z)}} \sqrt[5]{N} \right) + 1 \quad (3-46)$$

Выражение (3-46) показывает, каким будет количество интервалов квантования при выборе ширины коридора равной оптимальной ширине дифференциального коридора для уровня z . На рис. 3-6 показаны зависимости $n(z, \Delta z_{opt}(z))$ для трех различных ПРВ: двойной экспоненциальной (Лапласа)-кривая 3, нормальной-1 и рэлеевской-2.

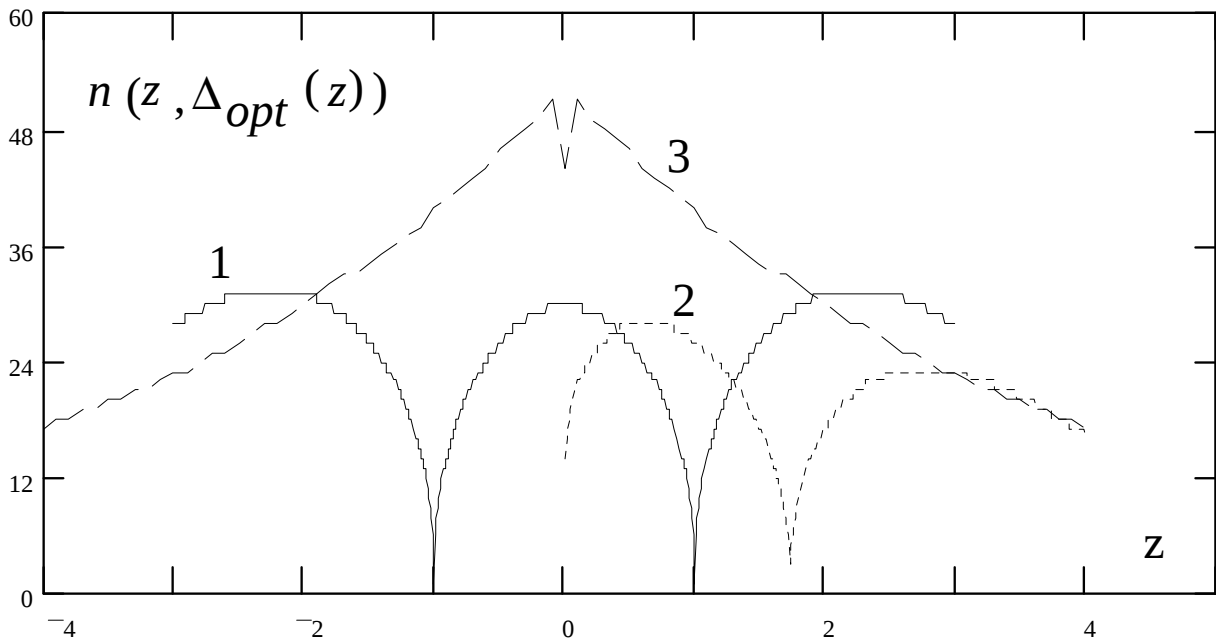


Рис. 3-6

Из рис. 3-6 видно, что число интервалов для различных уровней имеет большой диапазон изменения, поскольку для каждого уровня анализа z и вида анализируемой ПРВ ширина дифференциального коридора будет существенно различной. Однако, при построении гистограммы

производиться одновременная оценка ПРВ для всех уровней анализа с равновеликими интервалами, поэтому необходимо определить какое $n(z, \Delta z_{opt}(z))$ обеспечивает наиболее точное измерение ПРВ для всех уровней анализа.

Рассмотрим точность с которой производится оценка ПРВ при условии, что каждому уровню анализа соответствует его оптимальный коридор. Точность измерения будем характеризовать величиной суммарной ошибки $\zeta(z)$ в соответствии с (3-44). Данная зависимость $\zeta(z, \Delta z_{opt}(z))$ для рассматриваемых распределений приводится на рис. 3-7. Наибольшая погрешность оценки ПРВ для всех рассматриваемых распределений соответствует наибольшим значениям уровня анализа z (для симметричных распределений этот уровень $z = k_p/2$).

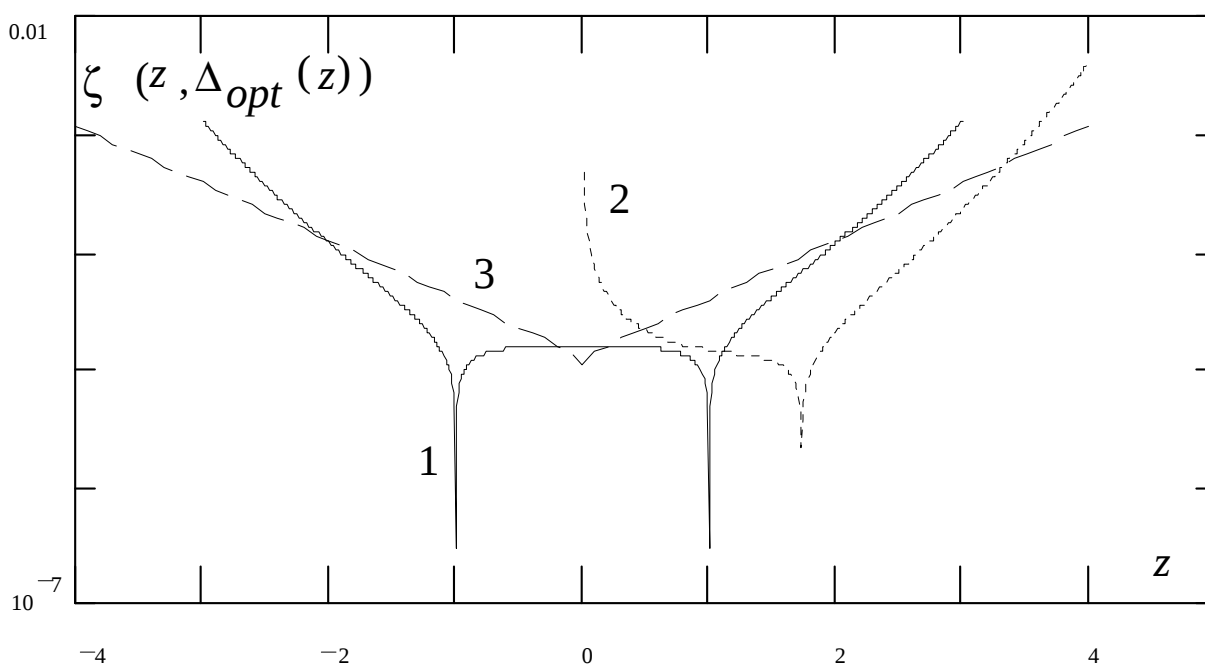


Рис. 3-7

Исходя из этого, логично производить измерения в точке с наибольшим уровнем анализа при наилучших условиях, т.е. при оптимальной ширине дифференциального коридора. Поэтому предлагается для построения гистограммы выбирать ширину интервала равной ширине оптимального интервала для наибольшего уровня анализа. Естественно, что при этом для оставшихся точек анализа погрешность оценки возрастет, тем не менее не превысит ошибку оценки для максимального уровня анализа. В соответствии с предложенным методом, на рис. 3-8 приводится результат расчета суммарной ошибки измерения для рассматриваемых типов ПРВ. Наибольшая суммарная погрешность наблюдается опять таки в точках наибольшего уровня анализа.

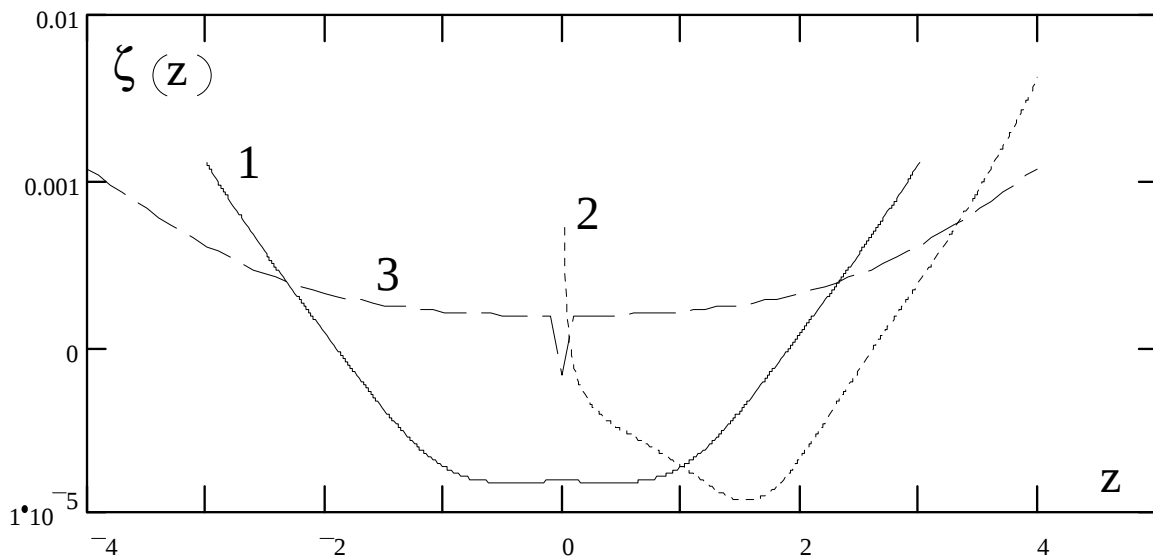


Рис. 3-8

Подставив в (3-46) найденное значение $\Delta z_{opt} = \Delta z_{opt}(z_{max}) = \Delta z_{opt}(k_p/2)$ получим оптимальное число уровней квантования

$$n \approx E \left(k_p \sqrt[5]{\frac{w''(k_p/2)^2}{144w(k_p/2)}} \sqrt[5]{N} \right) + 1 \quad (3-47)$$

При достаточно большом числе отсчетов первое слагаемое в (3-47) много больше 1, поэтому

$$n \approx k_p \sqrt[5]{\frac{w''(k_p/2)^2}{144w(k_p/2)}} \sqrt[5]{N} = A(w(z)) N^{0.2} \quad (3-48)$$

По структуре (3-48) подобно соотношению (3-39), однако оптимальное число уровней квантования пропорционально степени 0,2 числа отсчетов N . Зависимость $A(w(z))$ определяется видом ПРВ анализируемого процесса и отражает протяженность распределения (k_p), а также характеристики плотности соответствующие пиковым значениям ($w''(k_p/2), w(k_p/2)$). На рис. 3-5 данная рекомендация представлена областью 3.

Отметим, что в (3-48) вместо точных значений параметров ПРВ могут быть подставлены их оценки, найденные перед построением гистограммы. Таким образом, в соответствии с (3-48) выбору числа уровней квантования должна предшествовать определенная экспериментальная и расчетная работа. Нахождение оценки коэффициента пиковости для анализируемого процесса

$$\hat{k}_p = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{\hat{\sigma}_x} = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \hat{m}_x)^2}{N}}} \quad (3-49)$$

где $\hat{m}_x$, $\hat{\sigma}_x$ - оценки среднеквадратического отклонения и мат. ожидания соответственно. Оценка $w''(k_p/2)$, $w(k_p/2)$ может быть найдена методами оценки ПРВ для одного уровня анализа изложенными в [14].

Сопоставление различных предложений по выбору числа интервалов квантования показывает, что описанный метод позволяет определить число интервалов квантования с учетом особенностей вероятностных характеристик исследуемого случайного процесса.

3.3.2. Определение частоты дискретизации

Рассмотрим факторы, определяющие частоту временной дискретизации анализируемого случайного процесса с целью нахождения оценки плотности распределения вероятностей и информационных характеристик.

Как известно, оценка ПРВ методом дискретных выборок [14]

$$w^*[X(iT_0)] = M^*\{g[X(iT_0)]\} = M^*[Y(iT_0)] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_k(iT_0),$$

где N - число выборок, $y_k(iT_0)$ - k -я реализация преобразованного соответствующим образом $g[X(iT_0)]$ случайного процесса $X(iT_0)$.

Дисперсия оценки коррелированными выборками [14]

$$\begin{aligned} D\{w^*[X(iT_0)]\} &= D\{M^*[Y(iT_0)]\} = D\left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_k(iT_0)\right] \\ D\{w^*[X(iT_0)]\} &= \frac{1}{N} \left[K_y(0) + 2 \sum_{i=1}^N \left(1 - \frac{i}{N}\right) K_y(iT_0) \right]. \end{aligned} \quad (3-50)$$

Так как $K_y(iT_0) = K_y(0)\rho_y(iT_0)$, то выражение (3-50) можно записать

$$D\{w^*[X(iT_0)]\} = \frac{D[Y(iT_0)]}{N} \left[1 + 2 \sum_{i=1}^N \left(1 - \frac{i}{N}\right) \rho_y(iT_0) \right]. \quad (3-51)$$

В случае если отсчеты некоррелированы, т.е. $T_0 = \tau_{mk} \gg \tau_k$, (τ_k - интервал корреляции) корреляционная функция $\rho_y(iT_0) = 0$ и дисперсия оценки

$$D\{w^*[X(iT_0)]\} = \frac{D[Y(iT_0)]}{N} \quad (3-52)$$

При сравнении (3-51) и (3-52) видно, что случайная составляющая погрешности оценки ПРВ увеличивается с ростом коррелированности между выборками измеряемого случайного процесса. С точки зрения качества измерений ПРВ при неограниченной длине реализации целесообразно выбирать частоту дискретизации таким образом, чтобы выборки являлись некоррелированными.

При наличии реализации ограниченной длины, когда невозможно произвести все выборки некоррелированными анализ с использованием коррелированных выборок (с соответствующим увеличением их числа) обеспечит более точные измерения, если корреляционная функция преобразованного процесса $Y(iT_0)$ удовлетворяет следующему условию [23]

$$\rho_y(iT_0) \leq \frac{1}{\tau_{mk}}(\tau_{mk} - iT_0). \quad (3-53)$$

Выражение (3-53) показывает, что $\rho_y(iT_0)$ должна для этого убывать быстрее, чем линейная функция.

3.4. Разработка аппаратно-программных средств оценки ПРВ параметров сигналов

Основными операциями исследуемого метода оценки информативности параметров являются:

- оценивание многомерной ПРВ параметров сигнала методом гистограмм,
- вычисление критериев информативности на основе полученной оценки ПРВ параметра сигнала.

Поэтому реализация исследуемого метода оценки информативности включает средства оценки ПРВ и вычислитель критерия информативности.

Реализация вычислителя критерия информативности из-за сложности вычисления практически возможна только программным путем. Для этой цели аппаратно-программный комплекс должен включать в свой состав ЭВМ с соответствующим программным обеспечением.

Средства оценки ПРВ

С целью анализа существующих средств оценки ПРВ был проведен обзор существующих отечественных и импортных средств оценки ПРВ выпускаемых промышленностью и представленных в периодической печати в исследованиях различных авторов. Предметом анализа были метод оценки ПРВ, технические характеристики, способы построения, степень автоматизации измерения, способ задания погрешности измерения и стоимость прибора.

О разработке средств оценки ПРВ в периодической печати сообщается многими авторами. Как правило, средства оценки ПРВ являются составной частью измерительного комплекса предназначенного для исследования статистических свойств сигналов определенного происхождения.

По этой причине, технические характеристики и построение средств оценки ПРВ определяется характеристиками исследуемых сигналов (в основном энергетическим спектром сигнала и временем стационарности), и требованиями исследователя ко времени проведения анализа, скорости передачи гистограммы в ЭВМ и т. д.

Впервые многомерные анализаторы ПРВ были разработаны для исследований импульсных потоков в ядерной физике [24]. В [25] средства оценки ПРВ используются для оценки вероятностных свойств огибающей отражений от целей и местных предметов.

Ряд публикаций, например [26] посвящен созданию средств оценки ПРВ и их применению для анализа вероятностных свойств негауссовых помех при прохождении по радиоприемному тракту. Средства оценки ПРВ во всех перечисленных публикациях реализуют метод гистограмм.

Отечественная промышленность выпускает ряд анализаторов случайных процессов: X-6/4, X-6/5, X-6/8, X-6/11, X-6/12. Они предназначены для измерения основных статистических характеристик случайных процессов: авто- и взаимной корреляционной функции, энергетического спектра, одномерной, двумерной и условной ПРВ.

Наиболее совершенный из них - X-6/12, имеет следующие характеристики при измерении ПРВ[27]:

диапазон входных частот сигнала, МГц	
с преобразователем НЧ	0 - 0.5
с преобразователем ВЧ.....	0 - 4000
диапазон входных напряжений, В	
с преобразователем НЧ	+, - 0,04 - 10
с преобразователем ВЧ.....	+, - 0,1 - 1
погрешность измерения	
одномерной ПРВ, %.....	10
двумерной ПРВ, %.....	10

Данный прибор реализует гистограммный метод оценки ПРВ, управление режимами измерения и передача результатов измерений автоматизированы (имеется КОП). Алгоритм оценки ПРВ осуществлен

полностью аппаратно. Аналогичные анализаторы выпускаются за рубежом и имеют подобные с Х-6/12 характеристики и принципы построения.

Новые возможности создания средств оценки ПРВ открылись с появлением цифровых сигнальных процессоров (ЦСП). Средства оценки ПРВ с использованием ЦСП имеют ряд особенностей, свойственных реализации алгоритма статистического измерения на основе микропроцессоров. Во-первых, модульный принцип построения. Для измерения ПРВ используется три модуля: многоканальный модуль ввода (модуль АЦП), модуль ЦСП и модуль управления, общий для всех модулей измерителя. Во-вторых, измерения ПРВ становятся гибче: загружая в ЦСП различные программы возможно с использованием той же аппаратной части реализовывать как гистограммный, так и ядерный метод оценки ПРВ. Возможно построение гистограммы с неравновеликими интервалами.

Примером измерителей ПРВ на основе ЦСП может быть анализатор временных сигналов HP-35665A фирмы Hewlett Packard. Анализатор имеет модульную конструкцию и представляет собой интегрированную систему. Состав модулей определяется необходимостью тех или иных измерений.

Метрологическое обеспечение средств оценки ПРВ.

Погрешность измерения ПРВ характеризуется погрешностью измерения для дискретных значений ПРВ и определяется как среднее значение абсолютной величины нормированного отклонения результата измерения от расчетного значения при заданном отношении полосы интегратора к полосе сигнала (количестве выборок):

$$\varepsilon[p(x_i)] \equiv M \left[\left| \frac{\hat{p}(x_i) - p(x_i)}{\sigma} \right| \right] \leq \varepsilon_{\text{дон}} \quad \text{при} \quad \frac{\Delta f_u}{\Delta f_c} \leq k_{\Delta f}$$

Например, для Х-6/4 $\varepsilon_{\text{дон}}$ равно 12% при $k_{\Delta f}$ равном 10^{-4} .

Преимущества аппаратной реализации гистограммной оценки ПРВ.

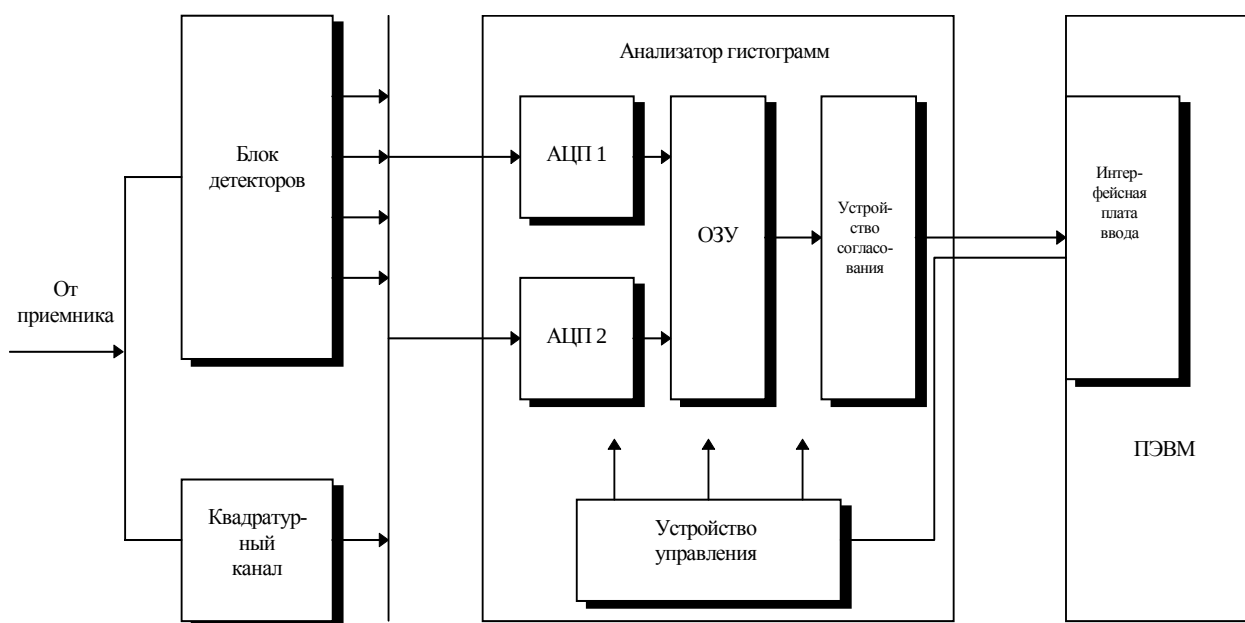
Применение аналого - цифровых преобразователей (АЦП) для группирования выборок случайного процесса не вносит изменений в ПРВ исследуемого процесса. При реализации ядерной оценки ПРВ применение АЦП неизбежно «изменяет» ПРВ исследуемого процесса в следствие того, что использование АЦ преобразования вносит шум квантования.

При гистограммной оценке используются АЦП небольшой разрядности, что снижает стоимость изделия.

Согласование динамического диапазона исследуемого сигнала и динамического диапазона АЦП.

1. Определение максимального и минимального значения входного сигнала.

Структурная схема аппаратно- программного комплекса оценки информативности параметров сигнала.



4. Разработка аппаратно- программных средств оценки информативности параметров и их использование

4.1. Пакет программ для оценки информативности параметров сигнала

4.2. Приложение метода оценки информативности при различении сигналов с различными видами модуляции

Определение вида модуляции является актуальной проблемой при решении многих радиотехнических задач. Спецификой указанной проблемы является априорная неопределенность параметров сигналов.

Предположим, что на вход приемника поступает сигнал:

$$\dot{s}(t) = \dot{A}(t) \exp(j2\pi ft)$$

где $\dot{A}(t) = A(t) \exp[j\phi(t)]$ комплексная огибающая. Частота f известна с точностью до заданного диапазона частот:

$$f \in [f_{\min} \div f_{\max}]$$

Закон модуляции и скорость модуляции неизвестна. Конечной целью приемника является определение вида модуляции, из заданного ограниченного множества видов модуляции.

Предположим, что возможны следующие виды модуляции:

- амплитудная манипуляция (АМн),
- 2-х позиционная фазовая манипуляция (ФМн1),
- 4-х позиционная фазовая манипуляция (ФМн2),
- частотная манипуляция (ЧМн),
- амплитудная модуляция (АМ),
- частотная модуляция (ЧМ).

При синтезе данного приемника возникают две задачи: во-первых, необходимо выбрать удобные (??) для практической реализации информативные компоненты ВН, во-вторых, на основе выбранных информативных компонент ВН синтезировать алгоритм различения.

Использование преобразования Стокса и информативность его параметров.

Вид модуляции, полностью определяется поведением во времени комплексной амплитуды $\dot{A}(t)$. Для анализа временной зависимости $\dot{A}(t)$

необходимо рассмотреть ее значения как минимум в два момента времени: t и $t + \tau$. Обозначим

$$A_1 = A(t) \quad A_2 = A(t + \tau) \quad \varphi_1 = \varphi(t) \quad \varphi_2 = \varphi(t + \tau)$$

Составим следующий комплексный вектор из отсчетов для двух моментов времени:

$$\vec{\dot{A}}(t) = \begin{Bmatrix} \dot{A}(t) \\ \dot{A}(t - \tau) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{A}_1 \\ \dot{A}_2 \end{Bmatrix}$$

Аналогия между вектором $\vec{\dot{A}}(t)$ и аналитическим представлением поляризации плоской электромагнитной волны в некоторой точке пространства позволяет применить хорошо разработанные методы поляризационного анализа для нашего случая. В частности для оценки вектора $\vec{\dot{A}}(t)$ можно использовать параметры Стокса:

$$q_1(t) = 2 \operatorname{Re}(\dot{A}_1 \tilde{\dot{A}}_2) = 2 A_1 A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$q_2(t) = 2 \operatorname{Im}(\dot{A}_1 \tilde{\dot{A}}_2) = 2 A_1 A_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)$$

Эти параметры содержат информацию и об огибающей, и о фазе сигнала в отстоящих на некоторый интервал τ моментах времени. Перейдем от комплексного вектора $\vec{\dot{A}}(t)$ к комплексному числу $\dot{Q}(t)$:

$$\dot{Q}(t) = q_1(t) + jq_2(t)$$

Преобразование $\vec{\dot{A}}(t) \rightarrow \dot{Q}(t)$ в [28, 29] названо первым стоксовым преобразованием сигнала. Комплексному числу $\dot{Q}(t)$ соответствует точка с координатами $q_1(t)$ и $q_2(t)$, при этом изменение модуля $|\vec{Q}(t)| = 2 A_1 A_2$ приводит к перемещению точки по радиусу из начала координат, а изменение разности фаз $\alpha(t) = \varphi_1(t) - \varphi_2(t)$ - к перемещению точки по окружности. При этом различным видам модуляции будут соответствовать различные траектории точки на плоскости, что обеспечивает параметрам Стокса информативность при различении по виду модуляции.

Выбор временного интервала τ в значительной степени произволен. Желательно выбирать $\tau > 1/\Delta F$, где ΔF - полоса, занимаемая сигналом. При выполнении указанного условия ПРВ параметров Стокса слабо зависят от скорости передачи, и конкретного кода сигнала. Однако поворот изображения относительно системы координат зависит от несущей частоты

f_0 , или точнее от соотношения между периодом высокой частоты и интервалом τ , что приводит к размазыванию изображения ПРВ. Что бы исключить указанную зависимость применяют повторное преобразование Стокса.

Рассмотрим значения $\dot{Q}(t)$ в два момента времени, сдвинутых на интервал τ_1 (выбор τ_1 также в значительной мере произволен и может быть равен интервалу τ):

$$\dot{Q}_1 = \dot{Q}(t) \quad \dot{Q}_2 = \dot{Q}(t - \tau_1)$$

Составим комплексный вектор,

$$\vec{\dot{Q}}(t) = \begin{Bmatrix} \dot{Q}(t) \\ \dot{Q}(t + \tau_1) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix}$$

и применим к нему преобразование Стокса $\vec{\dot{Q}}(t) \rightarrow \dot{S}(t)$

$$\dot{S}(t) = s_1(t) + js_2(t)$$

$$s_1(t) = 2 \operatorname{Re}(\dot{Q}_1 \dot{Q}_2) = 2 |\dot{Q}_1| |\dot{Q}_2| \cos(\alpha_1 - \alpha_2)$$

$$s_2(t) = 2 \operatorname{Im}(\dot{Q}_1 \dot{Q}_2) = 2 |\dot{Q}_1| |\dot{Q}_2| \sin(\alpha_1 - \alpha_2)$$

В плоскости $\dot{S}(t)$ различным видам модуляции соответствуют те же изображения ПРВ, что и в плоскости $\dot{Q}(t)$, но жестко привязанные к системе координат. Положение ПРВ не зависит от f_0 и нечувствительно к медленным изменениям f_0 .

Таким образом, осуществив два стоксовых преобразования мы получаем параметры в пространстве которых каждому виду модуляции соответствует специфический образ, форма которого устойчива к априорной неопределенности по f_0 , скорости передачи и конкретному коду сигнала.

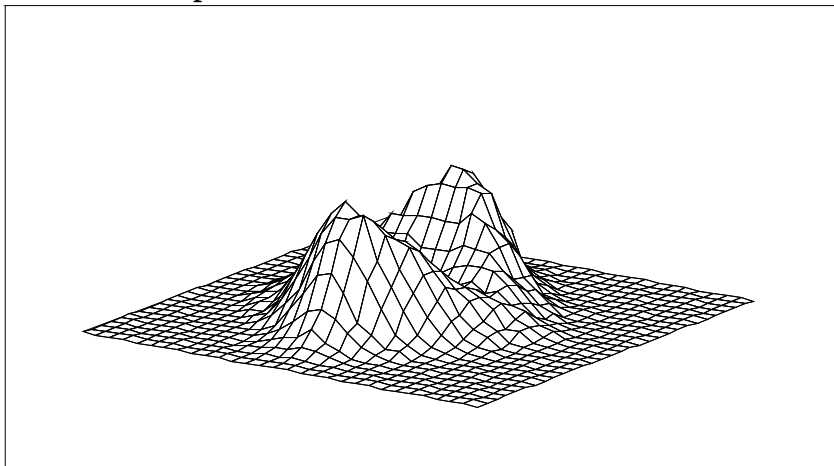
В качестве информативных возможно использование не только самих параметров Стокса, но и их производных: моментов одномерных распределений $p(s_1)$ и $p(s_2)$, моментов совместного распределения $p(s_2, s_1)$, порядковых статистик и т.д.

Что позволяет метод оценки информативности?

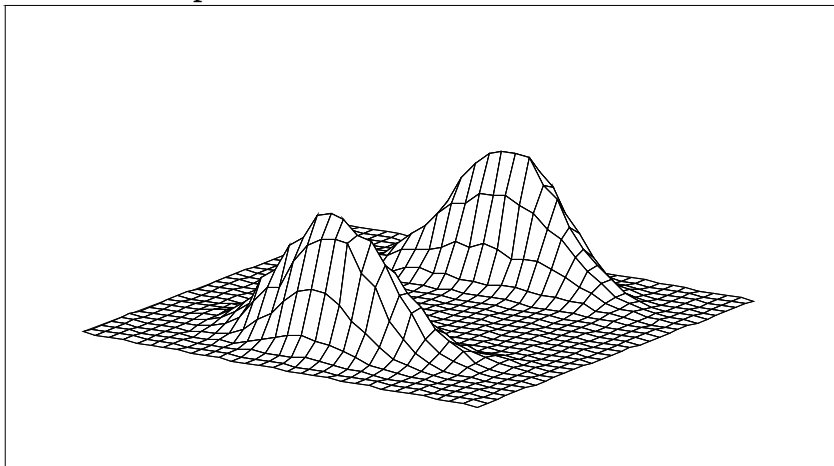
Метод позволяет определить информативность выбранных признаков до построения алгоритма различения, т.е. до нахождения решающей функции. Поэтому качество алгоритма различения на основе выбранных

признаков может быть охарактеризовано их информативность и не учитывает потери при построении решающей функции. Данного рода потери возникают вследствие трудности реализации оптимальных решающих правил и заменой их более простыми. В результате при проведении моделирования приемника с неоптимальной решающей функцией решение о информативности используемых параметров будет искажено.

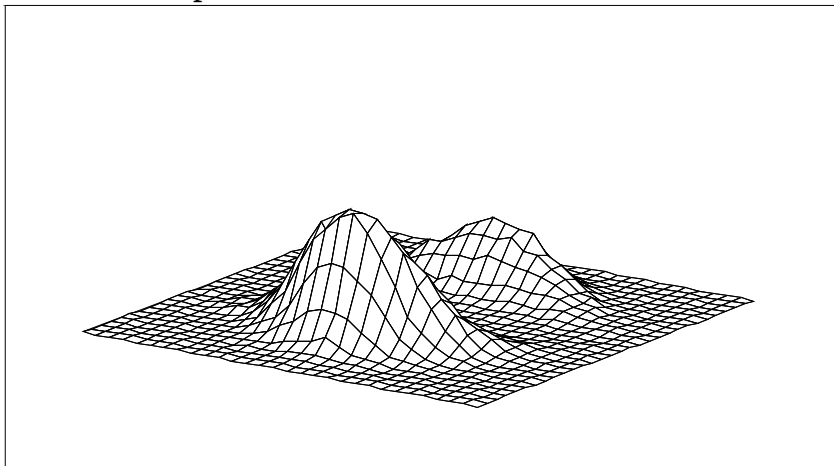
SNR=2, $p=0.5$



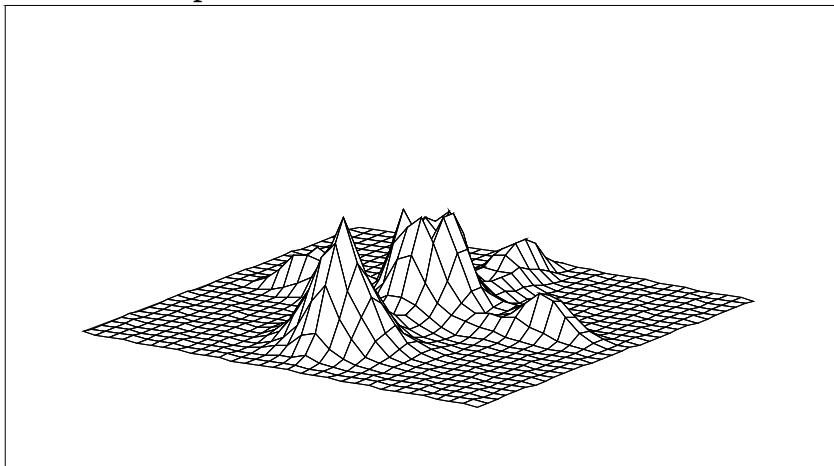
SNR=6, $p=0.5$



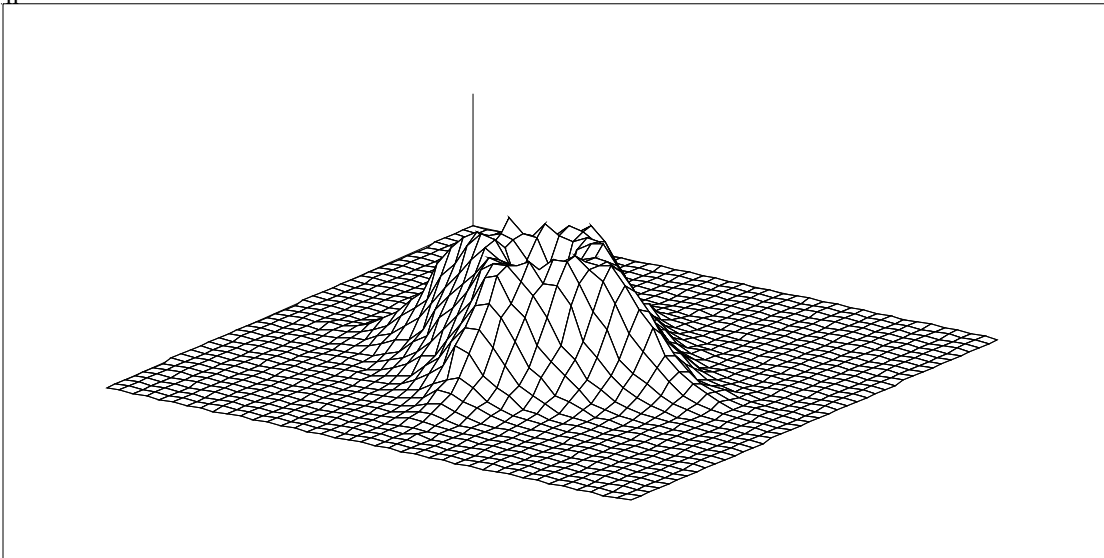
SNR=4, $p=0.2$

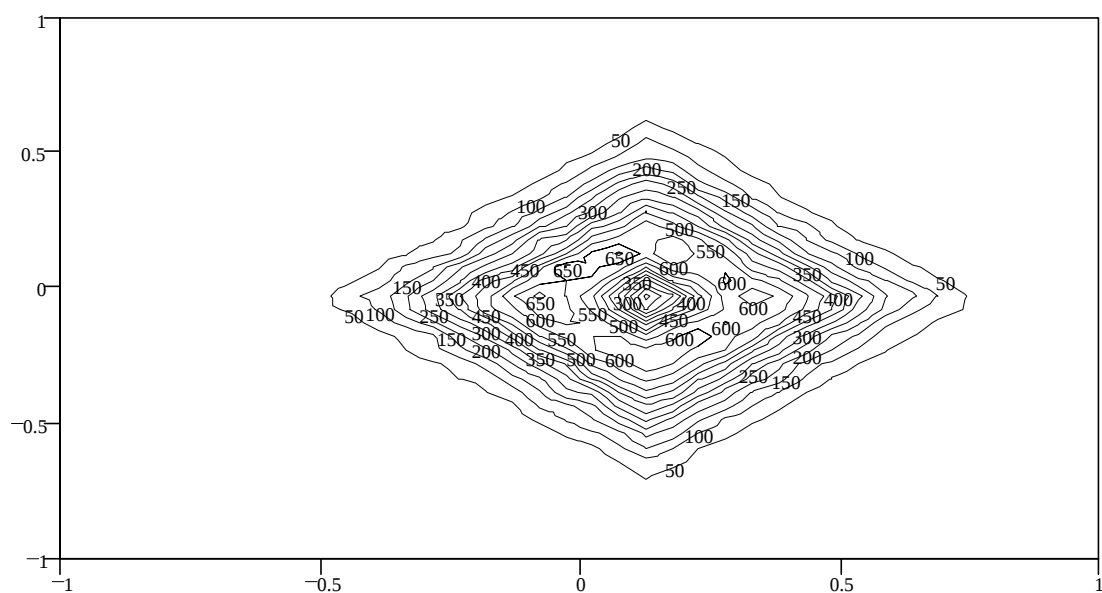


SNR=6, $p=0.5$



n





СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Эйкхофф. Основы идентификации систем управления, 75.
2. Каминскас В. Идентификация динамических систем по дискретным наблюдениям, Вильнюс, 82.
3. Сейдж Э.П, Уайт Ч.С. Оптимальное управление системами, 82
4. Боровков А. А. Математическая статистика. - М.: Наука, 1984.
5. Патрик Э. Основы теории распознавания образов, 80.
6. Фукунага К. Введение в статистическую теорию распознавания образов ,79.
7. Ту Дж., Гонсалес Р. Принципы распознавания образов.
8. Себестиан Г. С. Процессы принятия решений при распознавании образов., 65.
9. Тарловский, Фомин. Статистическая теория распознавания образов.
10. Тарасенко Ф.П. Введение в курс теории информации. - Томск: ТГУ, 1963.
11. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. М.: 1974.
12. Middleton D. Statistical-Physical Models of Electromagnetic Interference.- IEEE Trans on EMC., 1977, v.EMC-19, №3.
13. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. - М.: Радио и связь, 1982.
14. Мирский Г.Я. Аппаратурное определение характеристик случайных процессов. - М.: Энергия, 1972.
15. Хальд А. Математическая статистика с техническими приложениями. М.: Изд-во иностр. лит., 1956.
16. Венецкий И.Г., Венецкая В.И. Основные математико-статистические понятия и формулы. -М.: Статистика, 1979.
17. Шторм Регина. Теория вероятностей: Математическая статистика. Статистический контроль качества. -М.: Мир, 1970.
18. Новицкий П. В., Зограф И. А. Оценка погрешностей результатов измерений. - Л.: Энергоатомиздат, 1991.
19. Новицкий П.В. Понятие энтропийного значения погрешности //Измерительная техника.-1966: -№7.
20. Алексеева И.У. Теоретическое и экспериментальное исследование законов распределения погрешностей, их классификация и методы оценки их параметров: Автореф. дис. на соиск. учен. степени канд. тех. наук. -Л., 1975.
21. Куликов Е. И. Методы измерения случайных процессов. -М.: Радио и связь, 1986.
22. Бендат Дж., Пирсол А. Измерение и анализ случайных процессов. -М.: Мир, 1974.
23. Буйнявичюс В.-А.В., Карпицкайте В.-З.Ф., Пятрикис С.-Р.С. Статистические методы в радиоизмерениях. - М.: Радио и связь, 1985.
24. С. С. Курочкин. Многомерные статистические анализаторы. М.: Атомиздат, 1968.

25. Автоматизация экспериментальных исследований сигнально-помеховой радиолокационной обстановки. И. Г. Прокопенко и др. // Управляющие системы и машины. Киев: 1990, №3.
26. Универсальный автономный анализатор двумерных гистограмм случайных процессов АМГ - 2. Чабдаров Ш. М., и др. // Приборы и техника эксперимента. 1991, №2
27. ИПСС. Каталог изделий промышленности средств связи. Радиоизмерительные приборы. М., 1990.
28. О выборе информативных параметров при классификации сигналов по виду модуляции. Животовский Л. А. // Вопросы обработки сигналов в системах пассивной радиолокации, Таганрог, 1982, выпуск 6.
29. Классификация сигналов по виду модуляции. Животовский Л. А. // Вопросы обработки сигналов в системах пассивной радиолокации, Таганрог, 1983, выпуск 7.